

国际数学奥林匹克题库

Canada

加拿大

数学奥林匹克题解

《加拿大数学奥林匹克题解》编委会 组编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

国际数学奥林匹克题库

加拿大数学奥林匹克题解

《加拿大数学奥林匹克题解》编委会 组编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

加拿大数学奥林匹克题解 / 《加拿大数学奥林匹克题解》编委会组编. —杭州: 浙江大学出版社, 2010. 1
ISBN 978-7-308-07235-9

I. 加… II. 加… III. 数学课—高中—解题 IV.
G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 225844 号

加拿大数学奥林匹克题解

《加拿大数学奥林匹克题解》编委会 组编

责任编辑 杨晓鸣

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州求是图文制作有限公司

印 刷 德清县第二印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 9.5

字 数 195 千字

版 印 次 2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-07235-9

定 价 16.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

国际数学奥林匹克与奥林匹克数学(代序)

数学是锻炼思维的体操,以数学为内容的竞赛已有悠久的历史.在公元16世纪意大利的Tartalia和Cardano曾以解一元三次方程为内容进行过激烈的竞赛.在19世纪,法国科学院等也曾以悬赏的形式征求对数学难题的解答,通过有奖比赛而得到重要的数学发现.

国际数学奥林匹克的权威人士认为,以激发数学才能和引起数学兴趣为目的,中学生自愿参加的数学竞赛,是从匈牙利开始的.

1894年,著名数学家、物理学家L. Eötvös男爵就任匈牙利文化大臣.从这一年起,便开始了为选拔有数学才能的学生的国家考试.开始命名为Eötvös竞赛,后来又以对这一竞赛做出了贡献的J. Kürschak的名字命名,这一竞赛对匈牙利的数学发展起了很重要的作用.后来很多有成就的数学家都曾在这一竞赛的优胜者,例如:1897年的优胜者利波特·费叶尔,在傅立叶级数的可积性理论方面做出了许多出色的工作.1898年的优胜者忒奥多耳·冯·卡门是著名的应用力学家和工程师,对航空和航天技术的发展有过卓越的贡献.1903年的优胜者阿尔伏瑞德·哈尔提出了哈尔测度.马赛尔·黎斯是1904年的优胜者,在泛函分析中提出黎斯凸性定理.而1912年的优胜者嘎波尔·基格,他和波利亚合著的《分析中的定理和问题》至今仍享有盛名.

继匈牙利之后,罗马尼亚于1902年由《数学杂志》组织过数学竞赛.在以后的30年中再没有其他国家系统举办过重大的类似活动,直到匈牙利数学竞赛造就的大师们纷纷登台的时候,欧洲其他国家才睁开惊奇的目光,产生了浓厚的兴趣,并争相效仿.

1934年,前苏联在列宁格勒(今圣彼得堡)大学举办中学生数学奥林匹克,首次将中学生的数学竞赛与体育竞赛的奥林匹克相提并论,把这种活动命名为“数学奥林匹克”.

1949年,保加利亚举办了数学竞赛.

1950年,波兰举办了数学竞赛.

1951年,捷克斯洛伐克举办了数学竞赛.

1956年,中国举办了数学竞赛.

1958年,印度举办了数学竞赛.

此后还有前东德、瑞典(1961)、越南、前南斯拉夫、荷兰、古巴、意大利(1962)、蒙古、卢森堡(1963)、西班牙(1964)、英国、芬兰、阿根廷、比利时(1965)、以色列(1968)、加拿

大、希腊(1969)、前西德(1970)、澳大利亚(1971)、美国(1972)等国举办了数学竞赛。

事实表明,20世纪50年代以来,世界各地的这股举办中学生数学竞赛的热潮,它既为国际数学奥林匹克(IMO)的诞生准备了条件,又为世界数学奥林匹克的发展提供了动力。

1956年,经罗马尼亚罗曼教授的积极活动,东欧国家正式确定了开展国际数学奥林匹克竞赛的计划.并在1959年7月在罗马尼亚古都布拉索举行了第一届国际数学奥林匹克竞赛.保加利亚、捷克、匈牙利、波兰和罗马尼亚各派出了由8名学生组成的代表队,前苏联(实际是莫斯科)派出了4名学生组成的代表队.以后几年,参赛的国家并未增多.在1963年和1964年,南斯拉夫和蒙古先后加入,1965年芬兰加入,1967年法国、英国、意大利和瑞典也参加进来.从此参加的国家逐渐增多.1971年共有34个队,以后逐年发展,2008年共有103个国家及地区的549名选手参加了第49届IMO.

随着世界各地各级各类数学竞赛活动的蓬勃开展,对数学奥林匹克竞赛的试题的研究也悄然兴起.国际数学奥林匹克的发展使得竞赛的试题也形成一定的规范:它不再限定在各国高中数学的范围,而更多的是一般中学不怎么涉及的领域,如初等数论、组合论、平面几何、不等式等方面.而且试题的难度不在于了解和解决试题所需要的数学知识的多少,而在于对数学本质的洞察力以及是否具有创造力和数学的机智,试题无模式可套,要求学生探索思考,寻找规律.

由于IMO试题的上述特点,有人认为IMO试题代表的是一种特殊的数学,可以称为“奥林匹克数学”.

对于数学奥林匹克活动而言,其中最吸引人的,无疑就是那一道道闪耀着数学智慧,散发着数学美的试题.

数学大师华罗庚教授曾经说过:“出题比做题要难,题目要出得妙,出得好,要测得出水平.一次数学竞赛成功与否,主要取决于命题.”

基于数学竞赛试题的重要作用,对竞赛试题的研究和分析就成为一项重要的工作.为加强交流学习,开阔视野,给数学奥林匹克爱好者提供学习的源泉,我们特组织编写了“国际数学奥林匹克题库”系列丛书.

“国际数学奥林匹克题库”汇集了国内外重大数学竞赛的试题和解答.这些竞赛试题构思独特,新颖别致,灵活深邃,内容广,内涵深.解这些题不仅需要扎实的基础知识和基本技能,也需要灵活的思维和坚强的毅力.因此,对于有志于参加数学竞赛的同学来说,本丛书中的问题是不可或缺的训练材料.

“国际数学奥林匹克题库”的编写也是对国际数学竞赛资料的一次大整理,可作为各数学竞赛老师的一份重要资料,作为数学爱好者了解数学竞赛的一个窗口.

丛书的编写过程中,我们参考了一些国内外的资料,在此对这些资料的作者表示感谢.

本丛书篇幅较大,内容庞杂.虽然作者仔细地核查多遍,但囿于我们的水平,不当乃至错误之处恐难免,敬请读者不吝指正.请将您的意见发到 sxjszcbjb@163.com. 或至网站:<http://www.jsmaths.com> 留言.

编 者

2010 年 1 月于苏州

数学奥林匹克在加拿大

加拿大数学奥林匹克是从 1969 年开始的,每年举行一届,到 2009 年已举办了 41 届,前四届每次竞赛有十个题目,后来减至七八个题目,从第十二届以后,每届都是五个题目.

近年来,加拿大数学奥林匹克每年均在三月下旬举行,考试时间为 3.5 小时.

本书收集了第 22~41 届加拿大数学奥林匹克(1990—2009)的试题和解答,并在附录中给出了第 1~21 届加拿大数学奥林匹克(1969—1989)的试题.

加拿大从 1981 年开始参加国际数学奥林匹克(IMO),到 2008 年为止,他们参加 IMO 比赛 28 次,共得金牌 16 枚,银牌 37 枚,铜牌 66 枚,荣誉奖 16 个.他们的团体成绩多在第 10—20 名之间,最好的一次是第七名(1981 年).加拿大在国际数学奥林匹克竞赛中的具体成绩参见附录 2.

本书中的一部分试题来自加拿大数学奥林匹克的官方网站,一部分来自历年国际数学奥林匹克期间的领队交流资料,还有一部分来自国内一些期刊杂志.

本书中的解答一是来源于领队交流资料中的官方解答,二是来源于作者和作者辅导的学生的解答,还有一些来源于国内一些期刊杂志中发表的解答.在此,对这些资料的提供者表示深深地谢意.

目 录

一、加拿大数学奥林匹克(1990—2009)试题	(1)
第 22 届加拿大数学奥林匹克(1990)	(1)
第 23 届加拿大数学奥林匹克(1991)	(2)
第 24 届加拿大数学奥林匹克(1992)	(3)
第 25 届加拿大数学奥林匹克(1993)	(4)
第 26 届加拿大数学奥林匹克(1994)	(5)
第 27 届加拿大数学奥林匹克(1995)	(6)
第 28 届加拿大数学奥林匹克(1996)	(7)
第 29 届加拿大数学奥林匹克(1997)	(8)
第 30 届加拿大数学奥林匹克(1998)	(9)
第 31 届加拿大数学奥林匹克(1999)	(10)
第 32 届加拿大数学奥林匹克(2000)	(11)
第 33 届加拿大数学奥林匹克(2001)	(12)
第 34 届加拿大数学奥林匹克(2002)	(13)
第 35 届加拿大数学奥林匹克(2003)	(14)
第 36 届加拿大数学奥林匹克(2004)	(15)
第 37 届加拿大数学奥林匹克(2005)	(16)
第 38 届加拿大数学奥林匹克(2006)	(17)
第 39 届加拿大数学奥林匹克(2007)	(18)
第 40 届加拿大数学奥林匹克(2008)	(19)
第 41 届加拿大数学奥林匹克(2009)	(20)
二、加拿大数学奥林匹克(1990—2009)解答	(21)
第 22 届加拿大数学奥林匹克(1990)	(21)
第 23 届加拿大数学奥林匹克(1991)	(26)
第 24 届加拿大数学奥林匹克(1992)	(29)
第 25 届加拿大数学奥林匹克(1993)	(33)
第 26 届加拿大数学奥林匹克(1994)	(38)

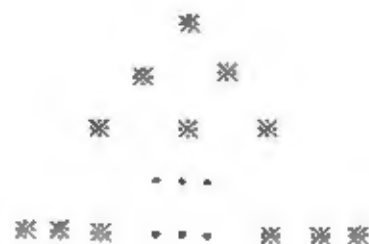
第 27 届加拿大数学奥林匹克(1995)	(43)
第 28 届加拿大数学奥林匹克(1996)	(46)
第 29 届加拿大数学奥林匹克(1997)	(50)
第 30 届加拿大数学奥林匹克(1998)	(53)
第 31 届加拿大数学奥林匹克(1999)	(59)
第 32 届加拿大数学奥林匹克(2000)	(64)
第 33 届加拿大数学奥林匹克(2001)	(67)
第 34 届加拿大数学奥林匹克(2002)	(73)
第 35 届加拿大数学奥林匹克(2003)	(77)
第 36 届加拿大数学奥林匹克(2004)	(80)
第 37 届加拿大数学奥林匹克(2005)	(84)
第 38 届加拿大数学奥林匹克(2006)	(88)
第 39 届加拿大数学奥林匹克(2007)	(93)
第 40 届加拿大数学奥林匹克(2008)	(97)
第 41 届加拿大数学奥林匹克(2009)	(101)
三、附录部分	(106)
附录 1 第 1~21 届加拿大数学奥林匹克试题(1969—1989)	(106)
附录 2 加拿大代表队在历届 IMO 中成绩一览	(131)
四、参考文献	(144)

一、加拿大数学奥林匹克(1990—2009)试题

第 22 届加拿大数学奥林匹克(1990)

1 有 $n(n \geq 2)$ 名选手参加一项为期 k 天的比赛,在每天的比赛中,选手可能得到的分数为 $1, 2, 3, \dots, n$,且没有两个人的得分相同,当 k 天比赛结束时,发现每名选手的总分都是 26 分.试确定数对 (n, k) 的所有可能情况.

2 如图,将 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个不同的数随机排列成一个三角数阵,设 M_k 是从上往下数第 k 行中的最大数,试求 $M_1 < M_2 < \dots < M_n$ 的概率.



1990.2 图

3 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 X ,由 X 向 AB, BC, CD, DA 分别作垂线,垂足为 A', B', C', D' .

求证: $A'B' + C'D' = A'D' + B'C'$.

4 一个质点在 x 轴上的运动速度最大为 2 米/秒,在平面其他地方的运动速度最大为 1 米/秒.试求该质点从原点出发在 1 秒钟内所能到达区域的边界曲线.

5 已知定义在正整数集上的函数 f 满足:

$$f(1) = 1, f(2) = 2,$$

$$f(n+2) = f(n+2-f(n+1)) + f(n+1-f(n)) \quad (n \geq 1).$$

(1) 求证: $0 \leq f(n+1) - f(n) \leq 1$, 并且当 $f(n)$ 为奇数时, $f(n+1) = f(n) + 1$;

(2) 试求适合 $f(n) = 2^{10} + 1$ 的所有 n 的值,并证明你的结论.

第 23 届加拿大数学奥林匹克(1991)

1 证明方程

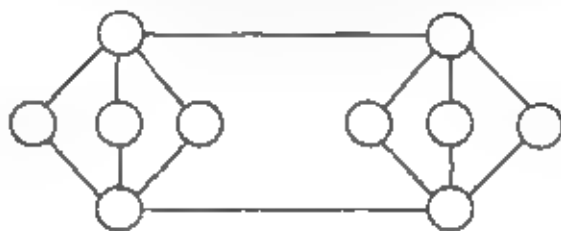
$$x^2 + y^5 = z^3$$

有无穷多组整数解, 其中 $xyz \neq 0$.

2 n 为固定的正整数, 求出所有具有以下性质的正整数的和: 在二进制中, 这个数恰有 $2n$ 个数字, 其中 n 个 1, n 个 0 (首位数字不能为 0).

3 在平面上, 设 C 是一个圆, P 是一给定的点, 过 P 作直线交 C 于 A, B 两点. 证明: 所有弦 AB 的中点在一个圆上.

4 从数集 $\{0, 1, 2, \dots, 14\}$ 中选出不同的数, 填入下图中的 10 个小圆中, 使得由线段连结的两个数之差的绝对值均不相同. 这可能吗? 请证明你的结论.



1991.4 图

5 如图, 大三角形的边长为 3, 由图中过各交点的直线所成的平行四边形的个数 $f(3) = 15$. 求边长为 n 的三角形中相应的平行四边形的个数 $f(n)$.



1991.5 图

第 24 届加拿大数学奥林匹克(1992)

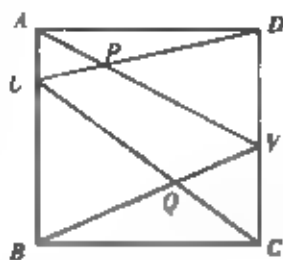
1 证明:前 n 个正整数的乘积能被它们的和整除的充要条件是: $n+1$ 不是一个奇素数.

2 已知 $x, y, z > 0$, 证明不等式

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z).$$

并确定等号何时成立.

3 如图所示, $ABCD$ 为正方形, U, V 分别是边 AB, CD 内部的点. 确定使四边形 $PUQV$ 面积为最大时, U, V 的所有可能情况.



4 解方程

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3.$$

1992.3 图

5 一副牌有 $2n+1$ 张, 其中一张“王”和 $1, 2, \dots, n$ 各两张. 把这 $2n+1$ 张牌排成一行, 使得“王”在正中间, 且对每个 $k, 1 \leq k \leq n$, 两张 k 之间恰有 $k-1$ 张牌. 当 $n \leq 10$ 时, 对怎样的 n , 上述安排是可能的, 对怎样的 n , 上述安排是不可能的?

第 25 届加拿大数学奥林匹克(1993)

1 一个三角形的 3 条边长及一条高是 4 个连续的正整数,且这条高将三角形分成的两个直角三角形的边长均为整数.求这个三角形的三边长,并证明这是唯一的.

2 证明:实数 x 是有理数的充要条件是:能从数列 $x, x+1, x+2, \dots$ 中选出 3 个不同的项,组成等比数列.

3 $\triangle ABC$ 中, AC 边上的中线 BD 和 AB 边上的中线 CE 相互垂直,求证: $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$.

4 若干个学校参加网球比赛,同一学校的选手相互不比赛,每两个学校的每两名选手之间都要比赛一场.在两个男孩或两个女孩之间进行的比赛称为单打,一个男孩和一个女孩之间的比赛称为混合单打.男孩的人数与女孩的人数至多相差 1,单打的场数和混合单打的场数也至多相差 1.问有奇数个选手的学校至多有几个?

5 数列 y_1, y_2, y_3, \dots 满足条件 $y_1 = 1$, 对于 $k > 0$, 有

$$y_{2k} = \begin{cases} 2y_k, & \text{若 } k \text{ 为偶数} \\ 2y_k + 1, & \text{若 } k \text{ 为奇数} \end{cases}$$
$$y_{2k+1} = \begin{cases} 2y_k, & \text{若 } k \text{ 为奇数} \\ 2y_k + 1, & \text{若 } k \text{ 为偶数} \end{cases}$$

证明:每个自然数恰在数列 y_1, y_2, y_3, \dots 中出现一次.

第 26 届加拿大数学奥林匹克(1994)

1 求和: $\sum_{n=1}^{1994} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n!}$.

2 求证: $\sqrt{2}-1$ 的每个正整数次幂都具有 $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ 的形式, 其中 m 是某个正整数(例如 $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}$).

3 25 个人围一圆桌而坐, 每小时进行一轮投票. 每人必须投“赞成票”或“反对票”. 每个人都按下述规则行事: 在第 n 轮投票时, 如果他和相邻的两人投同样的票, 则在第 $n+1$ 轮投票时, 他投与第 n 轮一样的票. 在第 n 轮投票时, 如果他投的票与相邻的两人都不一样, 则在第 $n+1$ 轮投和第 n 轮不同的票. 求证: 不论在第一轮投票时, 各人投了什么票, 总有一个时刻, 从这时刻起, 每个人在每一轮中投同样的票.

4 AB 是圆 Ω 的直径, P 为不在直线 AB 上的一点. 直线 AP 与 Ω 的交点为 A 和 U , 直线 PB 与 Ω 的交点为 B 和 V (注意, 在切线的情况下可能有 $A=U$ 或 $B=V$, 且若 P 在圆上, 则 $P=U=V$). 设 $|PU|=s|PA|$, $|PV|=t|PB|$, s, t 为非负实数, 用 s, t 表示 $\angle APB$ 的余弦值.

5 锐角三角形 ABC 中, AD 是 BC 边上的高, H 是线段 AD 内任一点, BH 和 CH 的延长线分别交 AC 、 AB 于 E 和 F , 求证: $\angle EDH = \angle FDH$.

第 27 届加拿大数学奥林匹克(1995)

- 1 设 $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$, 计算和

$$f\left(\frac{1}{1996}\right) + f\left(\frac{2}{1996}\right) + \cdots + f\left(\frac{1995}{1996}\right).$$

- 2 已知 a, b, c 为正实数, 求证:

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

- 3 如果一个四边形任意一对边不相交, 且有一个内角大于 180° , 那么我们就称它为“镖形”(如图所示). 设 C 是一个凸 s 边形, 将 C 划分成 q 个四边形, 任意两个四边形不重叠(也无空隙), 设其中有 b 个“镖形”, 证明: $q \geq b + \frac{s-2}{2}$.



1995.3 图

- 4 设 n 是一个固定的正整数, 证明: 对任何非负整数 k , 下述不定方程

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = y^{3k+2}$$

有无穷多个正整数解 $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$.

- 5 设 u 为区间 $(0, 1)$ 内一实参数, 定义

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq u, \\ 1 - (\sqrt{ux} + \sqrt{(1-u)(1-x)})^2 & u \leq x \leq 1. \end{cases}$$

数列 $\{u_n\}$ 如下递归定义:

$$u_1 = f(1), u_n = f(u_{n-1}) (n > 1).$$

求证: 一定存在正整数 k , 使得 $u_k = 0$.

第 28 届加拿大数学奥林匹克(1996)

- 1 如果 α, β, γ 是方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 的根, 求 $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ 的值.

- 2 求方程组

$$\begin{cases} \frac{4x^2}{1+4x^2} = y, \\ \frac{4y^2}{1+4y^2} = z, \\ \frac{4z^2}{1+4z^2} = x, \end{cases}$$

的所有实数解, 并证明你的结论.

- 3 a_1, a_2, \dots, a_n 是正整数 $1, 2, \dots, n$ 的任一排列. 设 $f(n)$ 是下述排列的数目, 它们满足条件:

(I) $a_1 = 1$;

(II) $|a_i - a_{i+1}| \leq 2, i = 1, 2, \dots, n-1$,

试问 $f(1996)$ 能否被 3 整除.

- 4 已知等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle B$ 的平分线与 AC 交于 D , 且 $BC = BD + AD$, 求 $\angle A$.

- 5 设 r_1, r_2, \dots, r_m 是给定的 m 个正有理数, 且 $\sum_{k=1}^m r_k = 1$. 对任意正整数 n , 定义

$$f(n) = n - \sum_{k=1}^m [r_k n].$$

求 $f(n)$ 的最大值和最小值.

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

第 29 届加拿大数学奥林匹克(1997)

1 有多少对正整数 x, y 满足 $x \leq y$ 并且最大公约数 $(x, y) = 5!$, 最小公倍数 $[x, y] = 50!$?

2 闭区间 $A = [0, 50]$ 是有限个闭区间的并集, 这些区间的长度均为 1, 证明: 可以从中去掉一些闭区间, 使得剩下的闭区间互不相交(即交集为空集), 并且总长度 ≥ 25 .

3 求证: $\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$.

4 已知平行四边形 $ABCD$ 内一点 O 满足 $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$, 求证: $\angle OBC = \angle ODC$.

5 将和式 $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{k^3 + 9k^2 + 26k + 24}$ 写成 $\frac{p(n)}{q(n)}$ 的形式, 这里 $p(n), q(n)$ 是 n 的整系数多项式.

第 30 届加拿大数学奥林匹克(1998)

1 求满足下面方程的实数 a :

$$\left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{a}{3}\right] + \left[\frac{a}{5}\right] = a,$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

2 在实数范围内解方程

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.$$

3 已知自然数 $n \geq 2$, 求证:

$$\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

4 在三角形 ABC 中, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, D 和 E 分别是边 AC 和 AB 上的点, 使得 $\angle CBD = 40^\circ$, $\angle BCE = 70^\circ$, F 是直线 BD 和 CE 的交点. 证明: 直线 AF 和直线 BC 垂直.

5 设 m 是一个正整数, 数列 $\{a_n\}$ 定义为:

$$a_0 = 0, a_1 = m, a_{n+1} = m^2 a_n - a_{n-1}, n \geq 1.$$

证明: 一个有序非负整数对 (a, b) (其中 $a < b$) 是方程 $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$ 的解的充分必要条件是 (a, b) 具有 (a_n, a_{n+1}) 的形式, 其中 $n \geq 0$.

第 31 届加拿大数学奥林匹克(1999)

1 求方程 $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$ 的所有实数解.

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

2 已知正三角形 ABC 的高为 1, 一个半径为 1 且圆心与 C 在 AB 同侧的圆沿线段 AB 滚动.

证明: 该圆在三角形 ABC 内的弧长为定值.

3 试求所有满足方程 $n = (d(n))^2$ 的正整数 n , 这里 $d(n)$ 表示 n 的正因数的个数.

4 已知 $\{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ 为集合 $S = \{1, 2, \dots, 17\}$ 的一个 8 元子集.

(I) 证明: 存在正整数 k , 使得方程 $a_i + a_j = k (1 \leq i, j \leq 8)$ 至少有二组不同的解;

(II) 给出一个 7 元子集, 使得对任意正整数 k , 方程 $a_i + a_j = k$ 均不存在二组不同的解.

5 非负实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$, 求证:

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}.$$

并确定等号成立的条件.

第 32 届加拿大数学奥林匹克(2000)

1 中午 12:00, Anne, Beth 和 Carmen 从同一地点沿着 300 米长的环形跑道跑步. 每人匀速地在无限的时间内以两种可能的方向奔跑. 证明: 如果 Anne 的速度不同于其他两人, 那么在以后某一时刻, Anne 与其他两人至少保持 100 米远的距离(这里“距离”是以离二者较近的弧长计算的)

2 数列 a_1, a_2, \dots, a_{100} 是整数 1901, 1902, \dots , 2000 的一个排列. 定义部分和数列

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}.$$

若数列 $\{S_i\}$ 中每一项 S_i ($1 \leq i \leq 100$) 均不被 3 整除, 则满足条件的数列 $\{a_i\}$ 有多少个?

3 设 $A = (a_1, a_2, \dots, a_{2000})$ 是一个整数数列, 其中 $a_i \in [-1000, 1000]$. 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2000} = 1$, 求证: 存在 A 的一个非空子数列, 其和为 0.

4 凸四边形 $ABCD$ 满足

$$\angle CBD = 2\angle ADB, \angle ABD = 2\angle CDB, AB = CB.$$

求证: $AD = CD$.

5 已知实数 a_1, a_2, \dots, a_{100} 满足

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{100} \geq 0,$$

$$a_1 + a_2 \leq 100,$$

$$a_3 + a_4 + \dots + a_{100} \leq 100.$$

求 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2$ 的最大值, 并求出达到最大值时的数列 a_1, a_2, \dots, a_{100} .

第 33 届加拿大数学奥林匹克(2001)

1 给定整系数二次函数 $f(x)$, 满足以下条件:

- (1) $f(x)$ 的各系数之和为素数;
 - (2) 方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的正整数解;
 - (3) 存在正整数 t , 使得 $f(t)=-55$.
- (i) 求证: 方程 $f(x)$ 的较小根为 2;
 (ii) 求方程 $f(x)=0$ 的较大根.

2 将 -10 到 10 填写到如下图所示的方格中, 每个方格均被染成红色或白色, 红色方格中的数字之和为 n , 莫林把一个代币放在方格 0 上, 她扔硬币 10 次, 每次扔出人头, 就把代币向右移动一格, 扔出字, 就把代币向左移动一格. 最后代币落在红色方格上的概率为有理数 $\frac{a}{b}$ (a, b 为正整数, $(a, b)=1$ [●], 且 $a+b=2001$). 求 n 的最大可能值.

-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

3 $\triangle ABC$ 中, $AC > AB$, P 是 BC 的垂直平分线和 $\angle A$ 的角平分线的交点, X 是 AB 延长线上的点, Y 是 AC 上的点, 并且 $PX \perp AB$, $PY \perp AC$, XY 和 BC 交于点 Z , 求 $\frac{BZ}{ZC}$ 的值.

4 n 是正整数, 现有一矩阵, 其各元素均为正整数, 对这个矩阵可作以下两种操作:

- (a) 将某一行的元素都乘以 n ;
- (b) 将某一列的元素都减去 n .

求所有可能的 n 值, 使得对给定的任何矩阵, 在经过有限次上述操作后, 其中元素全部变为 0.

5 半径为 1 的圆上三点 P_0, P_1, P_2 满足 $P_1 P_2 = t < 2$, 定义 P_i 是 $\triangle P_{i-1} P_i P_{i+1}$ 的外接圆圆心 ($i \geq 3$).

(i) 证明 $P_1, P_3, P_5, P_{13}, \dots$ 共线;

(ii) 令 $P_1 P_{1001} = x, P_{1001} P_{2001} = y$, 求使 $\sqrt[500]{\frac{x}{y}}$ 是整数的 t 值.

● 原题中无此条件, 参赛同学给出了两种不同的解答, 具体参看评注.

第 34 届加拿大数学奥林匹克(2002)

1 集合 $\{1, 2, \dots, 9\}$ 的子集 S 满足其中每一个无序数对的和均不同, 例如: $\{1, 2, 3, 5\}$ 有这种性质, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 则没有, 因为 $\{1, 4\}$ 和 $\{2, 3\}$ 的和均为 5. 问 S 中最多含有几个元素.

2 如果每一个不超过正整数 n 的正整数都可以写成 n 的不同因子的和, 则称 n 为“好数”. 例如 6 的因子有 1, 2, 3, 6. 因为

$$1=1, 2=2, 3=3, 4=1+3, 5=2+3, 6=6,$$

所以说 6 是“好数”. 证明: 两个“好数”的乘积也是“好数”.

3 证明: 对任意正实数 a, b, c , 有

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c,$$

并求出取等号的条件.

4 已知 $\odot O$ 半径为 r , A, B 是 $\odot O$ 上不同的点, 且 $AB < \sqrt{3}r$, 以 B 为圆心, AB 为半径作圆交 $\odot O$ 于点 C . P 是 $\odot O$ 内一点, $\triangle ABP$ 为正三角形, CP 的延长线交 $\odot O$ 于点 Q . 证明: $PQ = r$.

5 已知 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, 求所有满足下列条件的函数 $f: N \rightarrow N$:

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2).$$

第 35 届加拿大数学奥林匹克(2003)

1 在一个标准的时钟上,时针和分针连续转动.设 m 是整数,且 $1 \leq m \leq 720$.当前是 12:00 过 m 分钟,时针和分针的夹角恰为 1° .试确定 m 的所有可能值.

2 求 $2003^{2003^{2003}}$ 的最末三位数字.

3 求不定方程组:

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

的所有正实数根 (x, y, z) .

4 给定三圆有公共弦 AB , X 是最小圆周上不同于 A 和 B 的一个动点.直线 AX 与另两圆分别交于 Y 和 Z (Y 在 X 和 Z 之间).

求证:比值 $\frac{XY}{YZ}$ 不随动点 X 的位置而改变.

5 S 是平面上 n 个不同的点组成的点集, S 中任意两点距离的最小值为 1.证明:存在一个 S 的由至少 $\frac{n}{7}$ 个点组成的子集 T , T 中任意两点至少相距 $\sqrt{3}$.

第 36 届加拿大数学奥林匹克(2004)

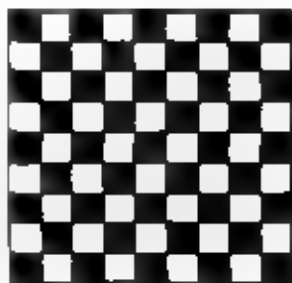
1 求所有满足方程组

$$\begin{cases} xy + z = x + y, & \text{①} \\ xz + y = x + z, & \text{②} \\ yz + x = y + z & \text{③} \end{cases}$$

的三元实数组 (x, y, z) .

2 将 8 个车放到如图的 9×9 棋盘中,使得这 8 个车互不攻击且所在小方格颜色相同,问共有多少种不同的方法.

(两车互不攻击是指这两个车不同在任何一行或任何一列)



2004.2 题图

3 已知, A, B, C, D 是圆上顺次四点,且 $AB < AD, BC > CD$, $\angle BAD$ 的平分线交圆于 X , $\angle BCD$ 的平分线交圆于 Y ,在由这六个点构成的六边形中,如果有四条边的长度相等,那么 BD 必为圆的直径.

4 已知 p 是奇素数,证明:

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv -\frac{p(p-1)}{2} \pmod{p^2}.$$

5 设 T 是由 2004^{10} 的所有正约数组成的集合,集合 S 满足:(1) S 是 T 的子集;(2) S 中任何一个元素都不是 S 中另一个元素的倍数.求 S 中元素个数的最大值.

第 37 届加拿大数学奥林匹克(2005)

1 将边长为 n 的正三角形每条边 n 等分, 得到若干个单位正三角形. 令 $f(n)$ 表示第一层的小三角形到最底层正中的小三角形的不同路径数. 每次移动, 只能从一个单位三角形走到另一个与它有公共边, 且与它在同一行或在其所在行下面一行的单位三角形中. 同时, 不能经过同一个小三角形 2 次或 2 次以上. 图中给出了 $n=5$ 时的一条路径. 试确定 $f(2005)$ 的值.



2005.1 图

2 正整数组 (a, b, c) 满足 $a^2 + b^2 = c^2$. 证明:

(i) $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 > 8$;

(ii) 不存在整数 n , 使得存在 (a, b, c) 满足 $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 = n$.

3 设 S 是一个由圆内的 n ($n \geq 3$) 点组成的集合. 求证:

(i) 总可以找到 S 中的三个不同的点 a, b, c , 使得存在对应的圆周上的三个点 A, B, C , 满足 a, b, c 分别是 S 中离 A, B, C 最近的点;

(ii) 无论 n 为何值, 都无法保证找到 S 中的四个点满足 (i) 中的条件.

4 记 $\triangle ABC$ 的周长、面积和外接圆半径分别为 P, K, R , 试求 $\frac{KP}{R^3}$ 的最大值.

5 若三元正整数组 (a, b, c) 满足

$$a \leq b \leq c, (a, b, c) = 1 \text{ 且 } (a+b+c) \mid (a^n + b^n + c^n),$$

则称 (a, b, c) 为“ n 幂次”的. 例如: $(1, 2, 2)$ 是“5 幂次”的.

(i) 求所有的三元组, 使得对所有 $n \geq 1$, 该数组是“ n 幂次”的.

(ii) 求所有的三元组, 使之是“2004 幂次”的和“2005 幂次”的但不是“2007-幂次”的.

第 38 届加拿大数学奥林匹克(2006)

1 设 $f(n, k)$ 为把 k 块糖分给 n 个小孩, 且使每个小孩至多分得 2 块糖的分法数目. 例如, 当 $n=3$ 时, $f(3, 7)=0$, $f(3, 6)=1$, $f(3, 4)=6$. 求 $f(2006, 1) + f(2006, 4) + f(2006, 7) + \cdots + f(2006, 1000) + f(2006, 1003)$ 的值.

2 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 矩形 $DEFG$ 内接于 $\triangle ABC$, 使得 D 在 AB 上, E 在 AC 上, F 和 G 在 BC 上. 试求所有可能的矩形 $DEFG$ 的对角线交点的轨迹.

3 在一个 m 行 n 列非负实数阵中, 每行、每列中都至少有一个正数. 若某一行与某一列相交于一个正数, 则该行的各数之和与该列的各数之和相等. 求证: $m=n$.

4 一次循环赛中有 $2n+1$ 支参赛队, 其中每队与其他队都只打一场比赛, 且比赛结果中没有平局. 若三个队 X, Y, Z 满足: X 击败 Y , Y 击败 Z , Z 击败 X , 则称它们形成一个环形三元组.

(1) 求环形三元组的最小可能数目;

(2) 求环形三元组的最大可能数目.

5 圆的内接直角 $\triangle ABC$ 的三个顶点分圆为三段弧, 直角顶点 A 所对的 \widehat{BC} 为一个半圆, $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ 为劣弧. 对三段弧的每一段作切线, 使切点恰为切线被直线 AB, AC 所截得的线段的中点. 例如过 \widehat{BC} 上一点 D 作切线, 分别交直线 AB, AC 于点 D', D'' , 使得 D 恰为线段 $D'D''$ 的中点. 类似地得到点 E 和 F .

求证: $\triangle DEF$ 是等边三角形.

第 39 届加拿大数学奥林匹克(2007)

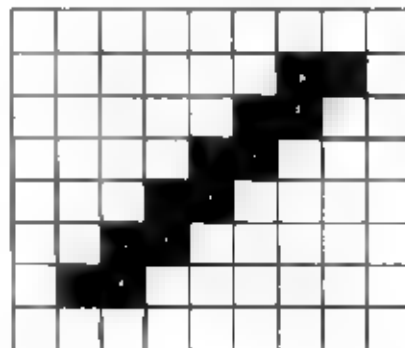
1 在 8×9 的方格表上已经放置了 6 块 2×1 的多米诺骨牌, 位置如图所示, 则该棋盘上至多可以放置多少块多米诺骨牌(每块骨牌都在方格表内, 且互不重叠, 包含已放置的 6 块多米诺)?

2 给定两个三角形满足如下条件:

(1) 一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应相等;

(2) 这两个三角形相似, 但不一定全等.

求证: 这两个三角形的相似比介于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 和 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 之间.



2007.1 图

3 已知在 \mathbf{R} 上取值的函数 f 对任意实数 x, y , 均有

$$f(xy) + f(y-x) \geq f(y+x).$$

(1) 试给出一个满足条件的非常数多项式 $f(x)$;

(2) 求证: 对于任意实数 x , 均有 $f(x) \geq 0$.

4 对于满足 $ab \neq 1$ 的实数 a, b 定义运算“ $*$ ”:

$$a * b = \frac{a+b-2ab}{1-ab}.$$

现有一个项数为 $n(n \geq 2)$ 的实数列 S , 其所有项 x 均满足 $0 < x < 1$, 从 S 中任取两项 a, b , 将它们删除, 并将 $a * b$ 的值添在 S 的最后, 这样得到的新数列的项数就减少了 1. 重复该操作直到仅剩下一项.

(1) 求证: 最后剩下的一项的值与每一步操作中所取的两项无关;

(2) 若 S 中的项的取值范围变为 $0 < x < 1$, 且 S 中恰有一项为 1, 又将会出现的什么样的结论?

5 $\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边 BC, CA, AB 于点 D, E, F . $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 与 $\triangle AEF$ 的外接圆 $\odot O_1$ 、 $\triangle BFD$ 的外接圆 $\odot O_2$ 、 $\triangle CDE$ 的外接圆 $\odot O_3$ 分别交于点 A 和 P, B 和 Q, C 和 R . 求证:

(1) $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 交于一点;

(2) PD, QE, RF 三线交于一点.

第40届加拿大数学奥林匹克(2008)

1 凸四边形 $ABCD$ 中, AB 是最长边. 点 M, N 分别在边 AB, BC 上, 且线段 AN, CM 均平分四边形 $ABCD$ 的面积. 求证: 线段 MN 平分对角线 BD .

2 求所有函数 $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$, 使得对任意有理数 x, y , 均有

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + y.$$

3 若 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 且 $a + b + c = 1$, 求证:

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}.$$

4 求所有函数 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, 使得对任意自然数 n 和素数 p , 均有

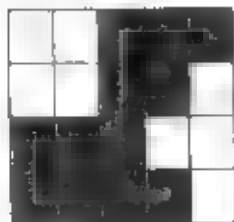
$$(f(n))^p \equiv n \pmod{f(p)}.$$

5 国际象棋棋盘上“车”的自避行走是指“车”这样行走的一条踪迹路径: 从一个方格出发穿过两个方格之间的公共边界(不能斜着走)进入另一个方格, 但走过的方格不能再走, 即“车”的路径是不自交的. 令 $R(m, n)$ 表示 $m \times n$ 的棋盘(m 行, n 列)上自避行走的“车”从左下角走到左上角的路径的数目.

例如: $R(m, 1) = 1, R(2, 2) = 2, R(3, 2) = 4, R(3, 3) = 11$. 求出 $R(3, n)$ 的表达式(用 n 表示).

第 41 届加拿大数学奥林匹克(2009)

1 给定 $m \times n$ 方格表, 其中每个方格被染成黑色或白色的. 若某个黑格的同一行左边有白色方格, 且同一列上边有白色方格, 则称这个黑格为“坏方格”(如图, 为一个不含有“坏方格”的 4×5 方格表). 求不含“坏方格”的 $2 \times n$ 方格表的数目的表达式.



2009.1 图

2 用纸板裁剪出两个半径不同的圆, 每个圆再分成 200 个相等的扇形, 且将每个圆的 100 个扇形涂成白色, 另 100 个扇形涂成黑色. 将小圆叠放在大圆的上面, 使得它们的圆心重合.

求证: 总可以旋转小圆, 使得这两个圆的扇形上下对齐, 且小圆至少有 100 个扇形位于大圆的同色扇形上.

3 定义
$$f(x, y, z) = \frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)}{(x + y)(y + z)(z + x)},$$

其中 x, y, z 为正实数, 求 $f(x, y, z)$ 的值域.

4 求所有的有序整数组 (a, b) , 使得 $3^a + 7^b$ 为完全平方数.

5 已知一个给定的平面点集中, 任意三点都可被一个半径为 1 的圆覆盖. 求证: 这个点集能被一个半径为 1 的圆覆盖.

二、加拿大数学奥林匹克(1990—2009)解答

第 22 届加拿大数学奥林匹克(1990)

1 有 $n(n \geq 2)$ 名选手参加一项为期 k 天的比赛,在每天的比赛中,选手可能得到的分数为 $1, 2, 3, \dots, n$,且没有两个人的得分相同,当 k 天比赛结束时,发现每名选手的总分都是 26 分.试确定数对 (n, k) 的所有可能情况.

【证明】所有选手的得分总和为

$$\frac{kn(n+1)}{2} = 26n, \text{ 即 } k(n+1) = 52.$$

(n, k) 的取值可以是 $(3, 13), (12, 4), (25, 2)$ 及 $(51, 1)$, 但最后一种显然不满足要求.

当 $(n, k) = (3, 13)$ 时, 3 名选手 13 天得分配置为

$$(1, 2, 3) + 2(2, 3, 1) + 2(3, 1, 2) + 3(1, 3, 2) + 2(3, 2, 1) + 3(2, 1, 3) = (26, 26, 26).$$

当 $(n, k) = (12, 4)$ 时, 12 名选手 4 天得分配置为

$$2(1, 2, \dots, 11, 12) + 2(12, 11, \dots, 2, 1) = (26, 26, \dots, 26).$$

当 $(n, k) = (25, 2)$ 时, 25 名选手 2 天得分配置为

$$(1, 2, \dots, 24, 25) + (25, 24, \dots, 2, 1) = (26, 26, \dots, 26).$$

故有 3 组解 $(n, k) = (3, 13), (12, 4)$ 或 $(25, 2)$.

2 如图, 将 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个不同的数随机排列成一个三角数阵,

设 M_k 是从上往下数第 k 行中的最大数, 试求 $M_1 < M_2 < \dots < M_n$ 的概率.

【解】记所求概率为 P_n , 则 $P_1 = 1$.

对于 $n+1$ 行的数阵, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 个数中最大的数应在第

$n+1$ 行, 其概率为

$$\frac{\frac{n+1}{2}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \frac{2}{n+2}.$$



1990.2 图

然后可任意填满第 $n+1$ 行, 将剩余的 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 个数填入前 n 行, 符合要求的概率为 P_n , 故 $P_{n+1} = \frac{2}{n+2} P_n$.

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad P_n &= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot P \\ &= \frac{2^n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

3 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 X , 由 X 向 AB, BC, CD, DA 分别作垂线, 垂足为 A', B', C', D' .

求证: $A'B' + C'D' = A'D' + B'C'$.

【证明】由 $XA' \perp AB, XB' \perp BC$ 可得 A', B, B', X 四点共圆.

由正弦定理, 有 $A'B' = XB \cdot \sin B$,

同理可得 $C'D' = XD \cdot \sin D = XD \cdot \sin B$,

$$\begin{aligned} \therefore A'B' + C'D' &= (XB + XD) \cdot \sin B \\ &= BD \cdot \sin B = 2R \sin A \cdot \sin B. \end{aligned}$$

其中 R 为四边形 $ABCD$ 的外接圆半径.

同理可得 $A'D' + B'C' = 2R \sin A \cdot \sin B$.

于是 $A'B' + C'D' = A'D' + B'C'$.

4 一个质点在 x 轴上的运动速度最大为 2 米/秒, 在平面其他地方的运动速度最大为 1 米/秒. 试求该质点从原点出发在 1 秒钟内所能到达区域的边界曲线.

【解】●由对称性只要考虑第一象限中的可达区域.

设质点从原点 O 到 $P(x, y)$ 的过程中最后离开 x 轴是在 $A(a, 0)$ 点 ($|a| \leq 2$), 由于从 O 到 A 的时间不少于 $\frac{|a|}{2}$ 秒, 故从 A 到 P 的时间不多于 $1 - \frac{|a|}{2}$ 秒. 因此 $(x-a)^2 + y^2 \leq \left(1 - \frac{a}{2}\right)^2$.

$$y^2 \leq -\frac{3}{4}a^2 + (2x-1)|a| + 1 - x^2.$$

当 $x \leq \frac{1}{2}$ 时, $y^2 \leq 1 - x^2$;

当 $\frac{1}{2} < x \leq 2$ 时,

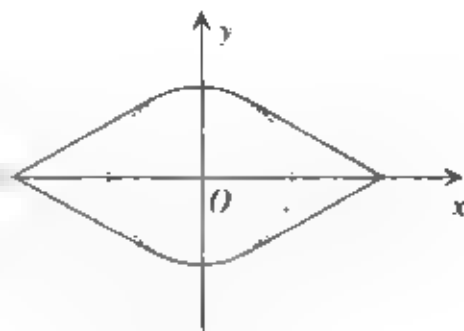
$$y^2 \leq \frac{3}{4} \left(\left| a - \frac{4x-2}{3} \right| \right)^2 + \frac{(2x-1)^2}{3} + 1 - x^2$$

$$\leq \frac{(2x-1)^2}{3} + 1 - x^2 = \frac{(2-x)^2}{3}.$$

因此可到达区域的边界线方程是

$$|y| = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{2-x}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} < |x| \leq 2. \end{cases}$$

它由单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的上、下两段弧和分别从点 $(+2, 0)$ 作的各两条切线段组成 (如下图中实线).



1990.4 图

5 已知定义在正整数集上的函数 f 满足:

$$f(1) = 1, f(2) = 2,$$

$$f(n+2) = f(n+2-f(n+1)) + f(n+1-f(n)) \quad (n \geq 1).$$

(1) 求证: $0 \leq f(n+1) - f(n) \leq 1$, 并且当 $f(n)$ 为奇数时, $f(n+1) = f(n) + 1$;

(2) 试求适合 $f(n) = 2n + 1$ 的所有 n 的值, 并证明你的结论.

【解】(1) 我们首先用数学归纳法证明一个更强的结果:

对任意自然数 n , 都有

$$f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}.$$

当 $n = 1$ 时, $f(2) - f(1) = 1$, 结论成立.

设当 $n < k$ 时, 结论成立. 我们有

$$\begin{aligned} & [(k+2) - f(k+1)] - [k+1 - f(k)] \\ &= 1 - [f(k+1) - f(k)] \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

因此, 由归纳假设, 有

$$f((k+2) - f(k+1)) - f(k+1 - f(k)) \in \{0, 1\}. \quad ①$$

下面分两种情况讨论:

情况 1 $f(k) - f(k-1) = 1$. ②

这时, 由已知递推式, 有

$$f(k+1) = f(k)$$

$$\begin{aligned}
&= f(k+1-f(k)) + f(k-f(k-1)) \\
&\quad - f(k-f(k-1)) - f((k-1)-f(k-2)) \\
&= f(k+1-f(k)) - f((k-1)-f(k-2)) \\
&= f(k-f(k-1)) - f((k-1)-f(k-2)) \quad (\text{根据②}) \\
&\in \{0, 1\}. \quad (\text{根据①})
\end{aligned}$$

情况 2 $f(k) - f(k-1) = 0$.

③

这时, 由已知递推式, 有

$$\begin{aligned}
f(k) &= f(k-f(k-1)) + f((k-1)-f(k-2)), \\
f(k-1) &= f(k-f(k-1)) + f((k-2)-f(k-3)), \\
\text{故有} \quad f(k-f(k-1)) &= f((k-2)-f(k-3)),
\end{aligned}$$

由①式, 结合单调性, 可知它们均等于 $f((k-1)-f(k-2))$. 从而

$$\begin{aligned}
&f(k+1) - f(k) \\
&= f(k+1-f(k)) - f((k-1)-f(k-2)) \\
&= f(k+1-f(k)) - f(k-f(k-1)) \\
&\in \{0, 1\}. \quad (\text{根据①})
\end{aligned}$$

无论哪种情况, 都有 $f(k+1) - f(k) \in \{0, 1\}$. 从而对任何自然数 n , 都有 $f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}$.

显然更有 $0 \leq f(n+1) - f(n) \leq 1$.

下用数学归纳法证明当 $f(n)$ 为奇数时, $f(n+1) = f(n) + 1$.

由已知, 当 $n=1$ 时, $f(1)=1$ 为奇数, 且

$$f(2) = f(1) + 1.$$

假设当 $n < k$ 时, 结论成立.

若 $f(k)$ 为奇数, 则 $f(k-1)$ 必为偶数 (否则, 若 $f(k-1)$ 为奇数, 则由归纳假设可得 $f(k) = f(k-1) + 1$ 为偶数, 矛盾!), 于是由前证结果有

$$\begin{aligned}
f(k) &= f(k-1) + 1, \\
f(k+1) &= f(k+1-f(k)) + f(k-f(k-1)) \\
&\quad - 2f(k-f(k-1)),
\end{aligned}$$

即 $f(k+1)$ 是偶数, 再由前证结果, 有

$$f(k+1) = f(k) + 1.$$

根据数学归纳法原理, 对任意自然数 n , 当 $f(n)$ 为奇数时,

$$f(n+1) = f(n) + 1.$$

(2) 我们用数学归纳法证明一个更强的结论: 对于任意正整数 $m > 1$, 方程 $f(n) = 2^{m-1} + 1$ 有唯一解 $n = 2^m$.

事实上, $m=2$ 时, 方程化为 $f(n) = 3$, 它有唯一解 $n = 2^2$, 即 $n = 4$ (我们可由已知递推

式得到 $f(3) = 2, f(4) = 3$; 由(1)得 $f(5) = 3 + 1 = 4$, 并由函数 $f(n)$ 的不减性判定解的唯一性).

设 $m=k$ 时, 结论成立.

由于 $f(n)$ 的值随着 n 的增加, 每次增加 0 或者 1, 又从已知的递推式可以看出 $f(n) \rightarrow \infty$ (否则从某时刻起, $f(n)$ 将为正的常数值, 而对足够大的 n , $f(n+2)$ 却为这个常数值 2 倍, 矛盾). 因此, 必有整数 n , 使得 $f(n) = 2^k + 1$.

这时, $f(n-1)$ 必为偶数, 并且 $f(n-1) = 2^k$.

由于 $f(n - f(n-1)) + f(n-1 - f(n-2)) = f(n) = 2^k + 1$.

并且左端两项的差为 0 或 1, 所以

$$f(n - f(n-1)) - f(n-1 - f(n-2)) + 1 = 2^{k-1} + 1.$$

由归纳假设, 有

$$n - f(n-1) = 2^k.$$

从而

$$n = 2^k + f(n-1) = 2^{k+1}.$$

根据数学归纳法原理, 对任意正整数 $m \geq 1$, 上述结论成立, 即方程 $f(n) = 2^{m+1} + 1$ 有唯一解 $n = 2^m$.

特别地, 方程 $f(n) = 2^k + 1$ 的唯一解为 $n = 2^{k-1}$.

第23届加拿大数学奥林匹克(1991)

1 证明方程

$$x^2 + y^2 = z^3$$

有无穷多组整数解, 其中 $xyz \neq 0$.

【证明 1】可以验证方程有两组解

$$(x, y, z) = (3, -1, 2), (10, 3, 7)$$

假定 (u, v, w) 是方程的一组解, 那么对任意整数 k , 则 $\gcd(2, 5, 3) = 30$ 可设

$$x = k^3 u, y = k^3 v, z = k^2 w.$$

这时, 有

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= k^{6+1} u^2 + k^{6+1} v^2 \\ &= k^7 (u^2 + v^2) \\ k^{3+2} w^3 &= x^3. \end{aligned}$$

于是 $(k^3 u, k^3 v, k^2 w)$ 是已知方程的解, 从而已知方程有无穷多组解.

【证明 2】取 $x = 2^{3k+1} u, y = 2^{3k+1} v, z = 2^{2k+1} w, k \in \mathbf{N}$, 则

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2^{3(2k+1)+2} u^2 + 2^{3(2k+1)+2} v^2 \\ &= 2^{6k+8} (u^2 + v^2) \\ &= 2^{4k+6} z^3. \end{aligned}$$

因此 $(x, y, z) = (2^{3k+1} u, 2^{3k+1} v, 2^{2k+1} w), k \in \mathbf{N}$ 是已知方程的解, 从而已知方程有无穷多组解.

【证明 3】令 $x = n^2, y = n^2$, 则

$$x^2 + y^2 = (2n)n^3.$$

现在取 $n = 4r^2$, 则

$$2n \cdot n^3 = 8r^2 \cdot 2^{16} r^4 = (2^{18} r^3)^2.$$

于是 $(x, y, z) = (2^{18} r^3, 2^{18} r^3, 2^{18} r^3)$ 是已知方程的解, 从而已知方程有无穷多组解.

2 n 为固定的正整数, 求出所有具有以下性质的正整数的和: 在二进制中, 这个数恰有 $2n$ 个数字, 其中 n 个 1, n 个 0 (首位数字不能为 0).

【解】 $n=1$ 时, 易知所求和为 $S_1=2$.

$n \geq 2$ 时, 首位数字为 1 的 $2n$ 位数, 在其余 $2n-1$ 位上, 只要 n 个 0 的位置确定了, 则 $n-1$ 个 1 的位置也就确定了, 从而这个 $2n$ 位二进制数也随之确定.

故首位数字为 1 的数共有 C_{2n-1}^n 个.

现考虑第 k ($2n \geq k \geq 1$) 位数字是 1 的数的个数, 因为其中 n 个 0 的位置只可从 $2n-2$ 个位置 (除去首位和第 k 位) 中选择, 故这样的数共 C_{2n-2}^n 个.

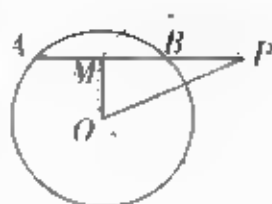
将所有这样的 $2n$ 位二进制数相加,按数位求和,使有

$$S_n = 2^n \cdot C_n^0 + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2n-1})C_n^1, \quad .$$

3 如图,在平面上,设 C 是一个圆, P 是一给定的点,过 P 作直线交 C 于 A 、 B 两点,证明:所有弦 AB 的中点在一个圆上.

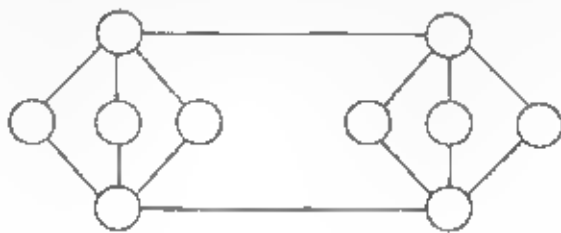
【证明】设圆心为 O ,弦 AB 的中点为 M ,连 OM ,则 $OM \perp AB$,即 $\angle OMP = 90^\circ$, M 在以线段 OP 为直径的圆上.

【评注】本题中 M 点的轨迹只是该圆含于圆 C 内的一段圆弧,而非整个圆.



1991.3图

4 从数集 $\{0, 1, 2, \dots, 14\}$ 中选出不同的数,填入下图中的 10 个小圆中,使得由线段连结的两个数之差的绝对值均不相同.这可能吗?请证明你的结论.



1991.4图

【解】不可能,用反证法证明如下:

如果能按题中要求从 $\{0, 1, \dots, 14\}$ 选出 10 个数填入图中圆内,使得由线段连结的两个数之差的绝对值各不相同,那么这 14 个差的绝对值应该恰好是 $1, 2, \dots, 14$,其中有 7 个奇数,7 个偶数,因而它们的和 S 是奇数.

另一方面,小圆中的每个数在 S 中出现偶数次(每个小圆引出偶数条线段),所以 S 应当是偶数.

以上矛盾即证明了我们的论断.

5 如图,大三角形的边长为 3,由图中过各交点的直线所成的平行四边形的个数 $f(3) = 1$,求边长为 n 的三角形中相应的平行四边形的个数 $f(n)$.



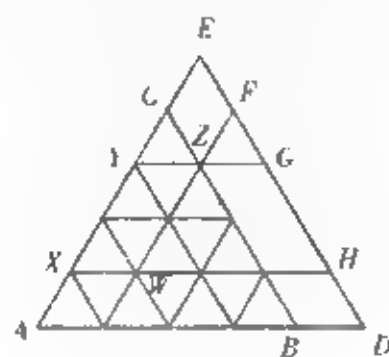
1991.5图

【解】设大三角形为 $\triangle ABC$ (边长为 n),记两边分别与 AB 、 AC 平行的平行四边形的个数为 $g(n)$.

在 AB 、 AC 延长线上分别取点 D 、 E ,使得 $AD = AE = n + 1$,则 $DE = n + 1$.易知上述平行四边形的每一边的延长线恰好与 DE 相交于一点,这四点互不相同,均为 D 、 E 或其 $n + 1$ 等分点,且与 AB 边平行的边对应的交点靠近点 D ,与 AC 边平行的边对应的交点靠近点 E .

反之,从 DE 上的 $n + 2$ 个点(包括端点 D 、 E)中任取四点,过靠近 D 点的两点作 AB 的平行线,过另两点作 AC 的平行线,便可得到上述的平行四边形.所以上述平行四边形

与 DE 上的四点组之间一一对应, 则有 $g(n) = C_{n+1}^4$, 从而 $f(n) = 3g(n) = 3C_{n+1}^4$.



1991.5 图

第24届加拿大数学奥林匹克(1992)

1 证明:前 n 个正整数的乘积能被它们的和整除的充要条件是: $n+1$ 不是一个奇素数.

【证明】前 n 个自然数的和与积分别为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 与 $n!$.

先证充分性: $n+1$ 不是奇素数, 则 $\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

(1) 若 $n+1$ 为偶数, 则 n 为奇数.

当 $n=1$ 时, 命题显然成立.

当 $n \geq 3$ 时, 有 $\frac{n+1}{2} \leq n-1$, 故 $\frac{n+1}{2} \mid (n-1)!$, 从而 $\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

(2) 若 $n+1$ 为奇合数, 则 n 为偶数, 设 $n+1=ml$, 其中 m, l 均是大于 3 的奇数. 从而 $m, l < \frac{n}{2}$.

若 $m \neq l$, 则 $\frac{n}{2} = m \cdot l \mid n!$, 即 $\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

若 $m=l$, 则当 $m=3$ 时, $n=8$, 此时有 $\frac{n(n+1)}{2} = 36 \mid 8!$.

当 $m \geq 4$ 时, 有 $3m \leq n$, 所以 $m, 2m, \frac{n}{2}$ 或者 $m, 3m, \frac{n}{2}$ 是 3 个互不相同且小于 n 的自然数, 因此也有 $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} \cdot m^2 \mid n!$.

再证必要性: 若 $\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$, 则 $n+1$ 不是奇素数.

若不然, $n+1$ 是奇素数, 则 $n+1 \nmid n!$, 从而 $\frac{n(n+1)}{2} \nmid n!$, 矛盾. 故结论得证.

【评注】本题的关键在于充分性的证明中 $n+1$ 为奇合数的情形, 以下再给出该情形的两种不同证法:

【别证 1】设 $n+1=ml$, 则有 $m, l \leq \frac{n+1}{3} \leq n-1$.

若 $m \neq l$, 则 $ml \mid (n-1)!$, 从而 $\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

若 $m=l=p$, 则 $p \geq 3, n+1=p^2-2 \geq 3p^2-2=2p+(p-2) > 2p$, 则 $(n-1)!$ 为多于 $2p$ 个连续自然数的乘积, 因此有 $p^2 \mid (n-1)!$, 从而 $\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

【别证2】设 $n+1=ml$, m, l 为奇数且 $3 \leq m \leq l$, 则

$$n \geq 9, m < 2l \leq \frac{2}{3}(n+1) = n-1 + \frac{5}{3} < n-1,$$

所以 $2ml \mid (n-1)!$, 则 $ml \mid (n-1)!$, 从而 $\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

2 已知 $x, y, z > 0$, 证明不等式

$$x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) \geq (x-z)(y-z)(x+y-z),$$

并确定等号何时成立.

【证明1】原不等式等价于

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2,$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geq 0. \quad ①$$

①式是关于 x, y, z 对称的, 不妨设 $x \geq y \geq z$. 令

$$x = z + \delta_1, y = z + \delta_2, (\delta_1 \geq \delta_2 \geq 0).$$

那么①式即为

$$(z + \delta_1)(\delta_1 - \delta_2)\delta_1 + (z + \delta_2)(\delta_2 - \delta_1)\delta_2 + z\delta_1\delta_2 \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow (\delta_1 - \delta_2)[(z + \delta_1)\delta_1 - (z + \delta_2)\delta_2] + z\delta_1\delta_2 \geq 0. \quad ②$$

②式显然成立, 从而①式成立, 命题得证. 由②式知当且仅当 $\delta_1 - \delta_2 = 0$ 时, 即 $x = y = z$ 时等号成立.

【证明2】原不等式即

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2.$$

由对称性, 可设 $x \geq z \geq y$, 于是

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq 0 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z).$$

当且仅当 $x=y=z$ 时, 等号成立.

【评注】不等式①即为舒尔(Schur)不等式

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0$$

在 $r=1$ 时的特例.

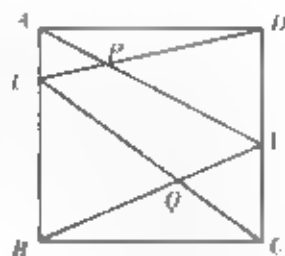
3 如图所示, $ABCD$ 为正方形, U, V 分别是边 AB, CD 内部的点, 确定使四边形 $PUQV$ 面积为最大时, U, V 的所有可能情况.

【解1】不妨设 $BU \geq CV$, 则 $QU' \geq QC$, 且 V 到 QC 的距离 $\leq B$ 到 QU' 的距离, 在 QU' 上取点 E , 使得 $QE = QC$, 则

$$S_{\triangle PUQ} \leq S_{\triangle PUE} + S_{\triangle UQE} = S_{\triangle UQF}.$$

又易知 $S_{\triangle QUV} = S_{\triangle BQC}$, 所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle UHQ} + S_{\triangle VQC} &= S_{\triangle BUE} + S_{\triangle BQE} + S_{\triangle VQE} \\ &\geq S_{\triangle UVE} + S_{\triangle BQE} + S_{\triangle VQE} \\ &= 2S_{\triangle QUV}. \end{aligned}$$



1992.3 图

$$\text{从而} \quad S_{\triangle QUV} \leq \frac{1}{4} S_{\triangle BUV}.$$

$$\text{同理} \quad S_{\triangle PVU} \leq \frac{1}{4} S_{\triangle BUV}.$$

$$\text{相加得} \quad S_{\triangle PQV} \leq \frac{1}{4} S_{\triangle BUV}.$$

并且当且仅当 $BU \perp CV$ 时等号成立.

【解2】设正方形的边长为1, 连结 UV .

易知 $S_{\triangle BUV} = S_{\triangle BPU} + S_{\triangle BQV} = S_{\triangle PQV}$.

所以 $S_{\triangle PQV} = S_{\triangle UPD} + S_{\triangle VQC}$.

作 $PE \perp AD$, 垂足为 E , 作 $QF \perp BC$, 垂足为 F , 并且设 $PE = x$,

$QF = y$, 则 $S_{\triangle PQV} = \frac{1}{2}(x+y)$.

设 $AU = a, DV = b$, 则

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{DE}{AD} + \frac{AE}{AD} = 1.$$

故 $x = \frac{ab}{a+b}$, 同理, $y = \frac{(1-a)(1-b)}{(1-a)+(1-b)}$, 从而

$$\begin{aligned} S_{\triangle PQV} &= \frac{1}{2} \left[\frac{ab}{a+b} + \frac{(1-a)(1-b)}{(1-a)+(1-b)} \right] \\ &= \frac{a+b-a^2-b^2}{2(a+b)(2-a-b)} \\ &= \frac{a+b-a^2-b^2}{4(a+b)-2(a+b)} \\ &= \frac{a+b-a^2-b^2}{4(a+b)-4(a^2+b^2)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

当且仅当 $a=b$ 时, 上式取等号, 故 U, V 应满足 $AU = DV$.

4 解方程

$$x^2 - \frac{r}{(r-1)} = 3.$$

【解1】去分母并整理, 得

$$r^2 + 2r - r = 6r - 3 = 0.$$

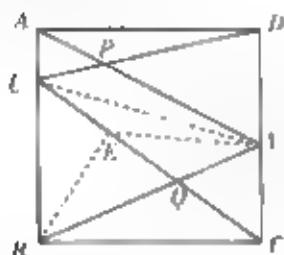
因式分解, 得

$$(x^2 + 3x + 3)(x^2 - x - 1) = 0.$$

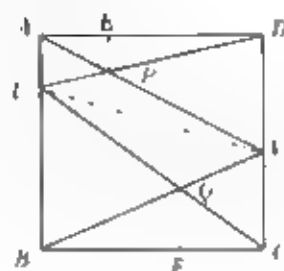
于是

$$x = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{3}) \text{ 或 } x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

【解2】令 $t = x + 1$, 原方程变成倒数方程



1992.3 图



1992.3 图

$$t^2 - 2t - 1 = \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} = 0,$$

即

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2\left(t + \frac{1}{t}\right) - 3 = 0.$$

从而

$$t + \frac{1}{t} = -1 \text{ 或 } 3.$$

即

$$t^2 + t + 1 = 0 \quad \text{或} \quad t^2 - 3t + 1 = 0.$$

于是

$$x = t = 1 - \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{3}i) \text{ 或 } \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

5 一副牌有 $2n+1$ 张, 其中一张“王”和 $1, 2, \dots, n$ 各两张. 把这 $2n+1$ 张牌排成一行, 使得“王”在正中间, 且对每个 $k, 1 \leq k \leq n$, 两张 k 之间恰有 $k-1$ 张牌. 当 $n \leq 10$ 时, 对怎样的 n , 上述安排是可能的, 对怎样的 n , 上述安排是不可能的?

【解】对每个 $k, 1 \leq k \leq n$, 设左边的那个 k 位于第 a_k 号位置, 右边的那个 k 位于第 b_k 号位置. 依题意, 要完成安排, 应有

$$b_k - a_k = k, 1 \leq k \leq n.$$

即

$$b_k + a_k = 2a_k + k.$$

所以

$$\sum_{k=1}^n (b_k + a_k) = 2 \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n k.$$

由于“王”在中间, 故“王”位于第 $n+1$ 号位, 因此

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (b_k + a_k) &= 1 + 2 + \dots + (2n+1) - (n+1) \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} - (n+1) \\ &= 2n(n+1). \end{aligned}$$

$$\text{于是 } 2 \sum_{k=1}^n a_k = 2n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}.$$

从而 $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{3n(n+1)}{4} \in \mathbb{N}$. 当 $n=1, 2, 5, 6, 9, 10$ 时, 不满足上式, 故此时不存在满

足题设要求的安排. 当 $n=3, 4, 7, 8$ 时, 满足上式, 且题设要求的安排是存在的. 例如:

$n=3$ 时, 1 1 3 王 2 3 2;

$n=4$ 时, 1 1 3 4 王 3 2 4 2;

$n=7$ 时, 1 1 3 6 7 3 4 王 5 6 4 7 2 5 2;

$n=8$ 时, 5 8 4 1 1 5 4 7 王 8 6 2 3 2 7 3 6.

【评注】对于 $n=3, 4, 7, 8$ 中的每一个, 均有不同的安排方式, 有兴趣的读者可以考虑下面的问题:

对 $n=3, 4, 7, 8$, 满足条件的不同安排方式数分别是多少?

第25届加拿大数学奥林匹克(1993)

1 一个三角形的3条边长及一条高是4个连续的正整数,且这条高将三角形分成的两个直角三角形的边长均为整数,求这个三角形的三边长,并证明这是唯一的.

【解】设 $\triangle ABC$ 中三边及高 AD 为正整数 $n, n+1, n+2, n+3$.

不妨设 $AB > AC$, 则 $AB > AC > AD$, 故 $AD = n$ 或 $n+1$.

(1) 若 $AD = n+1$, 则 $AB = n+3, AC = n+2, BC = n$. 从而

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 2\sqrt{n+2}, CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{2n+3},$$

其中 $2\sqrt{n+2}, \sqrt{2n+3}$ 是正整数, 且

$$2\sqrt{n+2} + \sqrt{2n+3} = n.$$

$$\begin{aligned} \text{由 } n^2 - 4 < n^2 &= (2\sqrt{n+2} + \sqrt{2n+3})^2 \\ &< (2\sqrt{n+2} + \sqrt{2n+4})^2 \\ &= (2+\sqrt{2})^2(n+2) \end{aligned}$$

知 $n-2 < (2+\sqrt{2})^2, n < 14$.

又 $\sqrt{n+2}$ 是整数, 故 $n-2$ 或 7 , 而此时 $\sqrt{2n+3} = \sqrt{7}$ 或 $\sqrt{17}$, 均不为整数, 因此满足要求的三角形不存在.

(2) 若 $AD = n$, 则 $BD \leq \sqrt{(n+3)^2 - n^2} = \sqrt{6n+9}$,

$$CD \leq \sqrt{(n+2)^2 - n^2} = 2\sqrt{n+1},$$

从而 $n+1 \leq BC \leq \sqrt{6n+9} + 2\sqrt{n+1} < 5\sqrt{n+1}$,

也即有 $n < 24$.

若 $BC = n+1$, 则 $AC = n+2, AB = n+3$. 这时

$$BD = \sqrt{6n+9}, CD = 2\sqrt{n+1},$$

但使得 $\sqrt{6n+9}, \sqrt{n+1}$ 均为整数的 $n (< 24)$ 不存在.

若 $BC = n+2$, 则 $AC = n+1, AB = n+3$. 这时

$$BD = \sqrt{6n+9}, CD = \sqrt{2n+1},$$

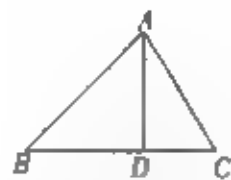
使得 $\sqrt{6n+9}, \sqrt{2n+1}$ 均为整数的 n 仅有一个: $n = 12$. 从而

$$AC = 13, BC = 14, AB = 15, AD = 12.$$

若 $BC = n+3$, 则 $AC = n+1, AB = n+2$. 这时

$$BD = 2\sqrt{n+1}, CD = \sqrt{2n+1},$$

但使得 $\sqrt{n+1}, \sqrt{2n+1}$ 均为整数的 $n (< 24)$ 不存在.



1993-1 图

综上所述,满足要求的三角形 ABC 有且仅有一解,其边长分别为 13, 14, 15.

2 证明:实数 x 是有理数的充要条件是:能从数列 $x, x+1, x+2, \dots$ 中选出 3 个不同的项,组成等比数列.

【证明】首先证明充分性:

设 $x+i, x+j, x+k$ 成等比数列,则

$$\begin{aligned}(x+j)^2 &= (x+i)(x+k) \\ &= (x+j+i-j)(x+j+k-j) \\ &= (x+j)^2 + (k+i-2j)(x+j) + (i-j)(k-j),\end{aligned}$$

从而 $(k+i-2j)(x+j) = (j-i)(k-j) \neq 0$.

所以 $k-i-2j \neq 0, x+j = \frac{(j-i)(k-j)}{k-i-2j}$ 为有理数, i 也为有理数.

再证明必要性:

设 x 为有理数,且 $x = \frac{q}{p}$ (p, q 为整数且 $p \neq 0$), 下证 $x, x+q, x+(p+2)q$ 成等比数列.

事实上,这时

$$\begin{aligned}x[x+(p+2)q] &= \frac{q}{p} \left[\frac{q}{p} + (p+2)q \right] \\ &= \left(\frac{q}{p} \right)^2 + 2q \times \frac{q}{p} + q^2 = (x+q)^2.\end{aligned}$$

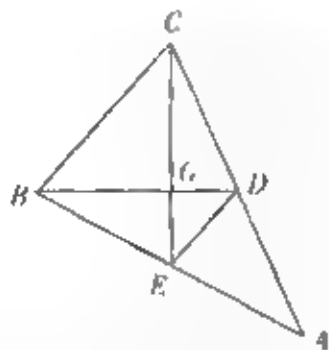
3 在 $\triangle ABC$ 中, AC 边上的中线 BD 和 AB 边上的中线 CE 相互垂直, 求证: $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$.

【证明 1】设两条中线 BD, CE 交于 G , 令 $GD = m, GE = n$, 则 $BG = 2m, CG = 2n$, 于是 $\cot B = \cot(\angle CBG + \angle GBE)$

$$1 - \frac{2n}{2m} \cdot \frac{n}{2m} = \frac{2m^2 - n^2}{3mn}.$$

类似地, 有 $\cot C = \frac{2n^2 - m^2}{3mn}$.

$$\therefore \cot B + \cot C = \frac{m^2 + n^2}{3mn} \geq \frac{2mn}{3mn} = \frac{2}{3}.$$



1993.3 例

【证明 2】^①分别记 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 则 $BE = \frac{c}{2}, DE = \frac{a}{2}, CD = \frac{b}{2}$, 由

① 本解答属于王卫华(《数学竞赛之窗》编辑部).

$BD \perp CE$, 得

$$BC^2 - BE^2 - CG^2 - GE^2 = CD^2 - DE^2.$$

将上式化简, 得

$$b^2 + c^2 = 5a^2.$$

注意到 $\cot B + \cot C = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} = \frac{a^2}{2S}$, 则只需证

$$3a^2 \geq 4S \Leftrightarrow 9a^4 \geq 16S$$

$$\Leftrightarrow 9a^4 \geq (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)$$

$$\Leftrightarrow 9a^4 \geq [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]$$

$$\Leftrightarrow 9a^4 \geq -(b^2 - c^2)^2 + [(b+c)^2 + (b-c)^2]a^2 - a^4$$

$$\Leftrightarrow 10a^4 \geq -(b^2 - c^2)^2 + 2a^2(b^2 + c^2) \Leftrightarrow 0 \geq -(b^2 - c^2)^2.$$

这是显然的, 故命题得证.

4 若干个学校参加网球比赛, 同一学校的选手相互不比赛. 每两个学校的每两名选手之间都要比赛一场. 在两个男孩或两个女孩之间进行的比赛称为单打, 一个男孩和一个女孩之间的比赛称为混合单打. 男孩的人数与女孩的人数至多相差 1. 单打的场数和混合单打的场数也至多相差 1. 问有奇数个选手的学校至多有几个?

【解】设有 n 个学校, 第 i 个学校派出 x_i 个男孩, y_i 个女孩, $i = 1, 2, \dots, n$. 由题设, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \right| \leq 1.$$

单打比赛有 $\sum_i (x_i x_i + y_i y_i)$ 场, 混合单打有 $\sum_i (x_i y_i + x_i y_i)$ 场, 由题意, 有

$$\left| \sum_i (x_i x_i + y_i y_i - x_i y_i - x_i y_i) \right| \leq 1.$$

即

$$\left| \sum_i (x_i - y_i)(x_i - y_i) \right| \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)(x_i - y_i) \\ &\leq 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

即在 $(x_i - y_i)(x_i - y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 中至多只有三项不为 0, 而且这三项都应该是 1.

这就是说, 至多有 3 个学校的人数 $x_i + y_i$ 为奇数.

如果参赛学校只有 3 个, 其中两个学校各派 1 名男孩, 另一个学校派 1 名女孩, 那么题设的条件全满足, 且奇数个选手的学校恰好为 3 个. 故奇数个选手的学校至多有 3 个.

5 数列 y_1, y_2, y_3, \dots 满足条件 $y_1 = 1$, 对于 $k > 0$, 有

$$y_{2k} = \begin{cases} 2y_k, & \text{若 } k \text{ 为偶数} \\ 2y_k + 1, & \text{若 } k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$y_{k+1} = \begin{cases} 2y_k, & \text{若 } k \text{ 为奇数} \\ 2y_k + 1, & \text{若 } k \text{ 为偶数} \end{cases}$$

证明:每个自然数恰在数列 y_1, y_2, y_3, \dots 中出现一次.

【证明 1】计算可得: $y_1 = 1, y_2 = 2y_1 + 1 = 3, y_3 = 2y_1 = 2, y_4 = 2y_2 = 6, y_5 = 2y_2 + 1 = 7, y_6 = 2y_3 + 1 = 5, y_7 = 2y_3 = 4$. 即有

$$\{y_1\} = \{1\}, \{y_2, y_3\} = \{2, 3\}, \{y_4, y_5, y_6, y_7\} = \{4, 5, 6, 7\}.$$

显然, 我们只需证明下面两个 2^m 个元素的集合相等:

$$\{y_{2^m}, y_{2^m+1}, \dots, y_{2^{m+1}-1}\} = \{2^m, 2^m+1, \dots, 2^{m+1}-1\} \quad (1)$$

用数学归纳法证明①式.

假设①式对某个 $m \geq 1$ 成立, 考虑 $y_k (k = 2^m + d, d = 0, 1, 2, \dots, 2^m - 1)$, 则有

$$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \geq 2^{m-1}, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{2^m + 1}{2} \right\rceil = 2^m - 1.$$

又因为 k 为偶数时, $k = 2 \cdot \frac{k}{2} = 2 \cdot \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$,

k 为奇数时, $k = 2 \cdot \frac{k-1}{2} + 1 = 2 \cdot \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$, 所以

$$2y\left[\frac{k}{2}\right] \leq y_k \leq 2y\left[\frac{k}{2}\right] + 1.$$

由归纳假设知

$$\{y_{2^m}, y_{2^m+1}, \dots, y_{2^{m+1}-1}\} \subseteq \{2^m, 2^m+1, \dots, 2^{m+1}-1\}.$$

下面证明对 $2^m \leq k \leq 2^{m+1}-1$, 映射 $k \rightarrow y_k$ 是一一对应的.

假设 $y_i = y_j$, 且 $2^m \leq i, j \leq 2^{m+1}-1$, 则可设 $i = 2k_1 + \varepsilon_1, j = 2k_2 + \varepsilon_2$, 其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}, 2^m \leq k_1, k_2 \leq 2^m - 1$. 则由条件有 $2y_{k_1} = 2y_{k_2}$, 又由归纳假设, 有 $k_1 = k_2$, 从而 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (否则 $|y_i - y_j| = 1$, 矛盾). 即得 $i = j$.

这就是说 $\{y_{2^m}, y_{2^m+1}, \dots, y_{2^{m+1}-1}\} = \{2^m, 2^m+1, \dots, 2^{m+1}-1\}$. 所以①式对任意 $m \geq 1$ 成立. 命题得证.

【证明 2】用二进制表示所有正整数. 设 $n = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_2$, 其中 $a_m = 1, a_i = 0$ 或 $1, i = 0, 1, \dots, m-1$.

我们用数学归纳法证明

$$y_n = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2,$$

其中 $b_m = 1, b_i = a_i + a_{i+1} \pmod{2}, i = 0, 1, \dots, m-1$.

当 $n = 1$ 时, 显然成立. 设对小于 n 的自然数命题成立. 对于 $n = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_2$, 记 $n' = (a_m a_{m-1} \dots a_1)_2$, 则有 $y_{n'} = (b_m b_{m-1} \dots b_1)_2$ 满足上述要求. 由题设

(1) 若 $a_1 a_0 = 00$, 则 $y_n = 2y_{n'} = 2 \cdot (b_m b_{m-1} \dots b_1)_2 = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2$, 其中 $b_0 = 0 \equiv a_1 + a_0 \pmod{2}$;

(2) 若 $a_1 a_0 = 10$, 则 $y_n = 2y_{n'} + 1 = (b_m b_{m-1} \dots b_1 1)_2 = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2$, 其中 $b_0 = 1 \equiv a_1 + a_0 \pmod{2}$;

(3) 若 $a_1 a_0 = 01$, 则 $y_n = 2y_{n'} + 1 = (b_m b_{m-1} \dots b_1 1)_2 = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2$, 其中 $b_0 = 1 \equiv a_1 + a_0 \pmod{2}$.

$+a_n \pmod{2}$;

(4) 若 $a_1 a_0 \equiv 11$, 则 $y_n = 2y_{n-1} + (b_m b_{m-1} \cdots b_0)_2 = (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_n)_2$, 其中 $b_0 \equiv 0 \pmod{2}$, $a_1 \equiv a_n \pmod{2}$.

因此, 命题对任意正整数 n 均成立.

反之, 对任意数 $(b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_2$, 可以唯一确定 $n = (a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0)_2$ 如下:

$$a_m = b_m - 1, a_i = b_i - a_{i+1} \pmod{2}.$$

所以, $n \mapsto y_n$ 是 $\mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ 的一一对应, 从而命题得证.

第26届加拿大数学奥林匹克(1994)

1 求和: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n!}$.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n!} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{(n-1)!} + \frac{n+1}{n!} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n!} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n!} + \sum_{n=1}^{994} (-1)^n \frac{n+1}{n!} \\
 &= -1 + \frac{1995}{1994!}.
 \end{aligned}$$

【评注】用类似地方法可以得到更一般的结果:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n!} = -1 + (-1)^k \frac{k+1}{k!}.$$

2 求证: $(\sqrt{2}-1)^n$ 的每个正整数次幂都具有 $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ 的形式, 其中 m 是某个正整数 (例如 $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}$).

【证明 1】我们用数学归纳法证明:

$$(\sqrt{2}-1)^n = \begin{cases} a\sqrt{2}-b, & \text{其中 } 2a^2=b^2+1, n \text{ 是奇数,} \\ a-b\sqrt{2}, & \text{其中 } a^2=2b^2+1, n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

当 $n=1, 2$ 时, 有

$$(\sqrt{2}-1)^1 = 1 \cdot \sqrt{2} - 1, \quad 2 \cdot 1^2 = 1^2 + 1,$$

$$(\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}, \quad 3 = 2 \cdot 2^2 + 1.$$

假设对奇数 $n(\geq 1)$ 命题成立, 则

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2}-1)^{n+1} &= (\sqrt{2}-1)^n (\sqrt{2}-1) \\
 &= (a\sqrt{2}-b)(\sqrt{2}-1) \quad (\text{其中 } 2a^2=b^2+1) \\
 &= (2a+b) - (a+b)\sqrt{2} = A - B\sqrt{2},
 \end{aligned}$$

其中 $A=2a+b, B=a+b$. 于是

$$\begin{aligned}
 A^2 &= (2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 \\
 &= 2a^2 + 4ab + 2b^2 + 1 = 2B^2 + 1.
 \end{aligned}$$

从而命题对 $n+1$ 也成立.

假设对偶数 $n(\geq 2)$ 命题成立, 则

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^n &= (\sqrt{2}-1)^n (\sqrt{2}+1) \\&= (a+b\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) \quad (\text{其中 } a''=2b'+1) \\&= (a+b)\sqrt{2} + (a+2b) = A\sqrt{2} + B,\end{aligned}$$

其中 $A=a+b, B=a+2b$. 于是

$$\begin{aligned}2A^2 &= 2a^2 + 4ab + 2b^2 \\&= a^2 + 4ab + 4b^2 + a^2 - 2b^2 \\&= B^2 - 1.\end{aligned}$$

从而命题对 $n+1$ 也成立.

综上所述, 欲证命题成立.

于是, 当 n 是奇数时, 取 $m=2a$, 当 n 是偶数时, 取 $m=a^2$.

【证明 2】对于给定的正整数 n , 记 $a=(\sqrt{2}-1)^n, b=(\sqrt{2}+1)^n$, 则 $ab=1$, 记 $c=\frac{b+a}{2}, d$

$$d=\frac{b-a}{2}.$$

若 n 为偶数, 设 $n=2k$, 则

$$\begin{aligned}c &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n C_n^j (\sqrt{2}^{n-j} + (-1)^j \sqrt{2}^{j-n}) \\&= \sum_{j=0}^k C_{2k}^{2j} \sqrt{2}^{2k-2j} = \sum_{j=0}^k C_{2k}^{2j} 2^{k-j}, \\ \frac{d}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n C_n^j (\sqrt{2}^{n-j} - (-1)^j \sqrt{2}^{j-n}) \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{k-1} C_{2k}^{2j+1} \sqrt{2}^{2k-2j-1} = \sum_{j=0}^{k-1} C_{2k}^{2j+1} 2^{k-j-1}.\end{aligned}$$

这表明 c 和 $\frac{d}{\sqrt{2}}$ 均为正整数. 类似地, 当 n 为奇数时, 有 $\frac{c}{\sqrt{2}}$ 和 d 都是正整数, 从而 c^2 和 d^2 均

为正整数. 注意到

$$c^2 - d^2 = \frac{1}{4}((b+a)^2 - (b-a)^2) = ab = 1.$$

令 $m=c^2$, 则 $m-1=c^2-1=d^2$, $a=c-d=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$, 命题得证.

【证明 3】设 m, n 为正整数, 则

$$(\sqrt{2}-1)^n (\sqrt{2}+1)^n = 1 = (\sqrt{m}-\sqrt{m-1})(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}),$$

从而

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

与

$$(\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{m}+\sqrt{m-1}$$

必同时成立.

将两式相加,得

$$2\sqrt{m} - (\sqrt{2}-1)^n + (\sqrt{2}+1)^n.$$

从而

$$m = \frac{1}{4} [(\sqrt{2}-1)^{2n} + 2 + (\sqrt{2}+1)^{2n}].$$

此时, $\sqrt{m} - \sqrt{m-1} = (\sqrt{2}-1)^n$, 故只需证明

$$4 \mid (\sqrt{2}-1)^{2n} + 2 + (\sqrt{2}+1)^{2n}.$$

又

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2}-1)^{2n} + (\sqrt{2}+1)^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{2k} [(-1)^k \cdot \sqrt{2}^{2n-2k} + \sqrt{2}^{2n-2k}] \\ &= \sum_{l=0}^n C_{2n}^{2l} \cdot 2^{n-l+1}. \end{aligned}$$

当 $l=0, 1, 2, \dots$, 时, $2^{n-l+1} \equiv 0 \pmod{4}$. 当 $l=n$ 时, $C_{2n}^{2n} \cdot 2^{n-l+1} = 2$, 从而

$$\sum_{l=0}^n C_{2n}^{2l} \cdot 2^{n-l+1} \equiv 2 \pmod{4},$$

则

$$(\sqrt{2}-1)^{2n} + 2 + (\sqrt{2}+1)^{2n} \equiv 2 + 2 \equiv 0 \pmod{4}.$$

命题得证.

3 25 个人围一圆桌而坐,每小时进行一轮投票,每人必须投“赞成票”或“反对票”.每个人都按下述规则行事:在第 n 轮投票时,如果他和相邻的两人投同样的票,则在第 $n+1$ 轮投票时,他投与第 n 轮一样的票.在第 n 轮投票时,如果他投的票与相邻的两人都不一样,则在第 $n+1$ 轮投和第 n 轮不同的票.求证:不论在每一轮投票时,各人投了什么票,总有一个时刻,从这时刻起,每个人在每一轮中投同样的票.

【证明】注意到如果在某一轮投票中,相邻的两人投相同的票,则按照规则,他们的观点将永不改变,称这样的人是“稳定的”.由于 25 是奇数,所以在第一轮投票时,必有相邻两人投一样的票,及开始时至少有两人是“稳定的”(用反证法证明,如果在第一轮投票中,没有“稳定的”两人,那么投赞成票和投反对票的人将交错出现,这样,投赞成票和投反对票的人应当一样多,这与总人数 25 为奇数矛盾).

又对于任意一个稳定的人 A ,他旁边的人或者是“稳定的”,或者将在下一轮投票时观点变得与 A 相同而成为“稳定的”.于是必有某个时刻这 25 人都成为“稳定的”.这即为我们所要证明的.

【评注】将 25 改为任一正奇数 $2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$),结论依然成立.

4 AB 是圆 Ω 的直径, P 为不在直线 AB 上的一点.直线 AP 与 Ω 的交点为 A 和 U , 直线 PB 与 Ω 的交点为 B 和 V (注意,在切线的情况下可能有 $A=U$ 或 $B=V$,且若 P 在圆上,则 $P=U=V$). 设 $PU=s \cdot PA$, $PV=t \cdot PB$, s, t 为非负实数,用 s, t 表示

$\angle APB$ 的余弦值.

【解】(1) 若 P 在圆 Ω 外, 因 $\angle AUB = \angle AVB = 90^\circ$, 所以

$$\cos \angle APB = \frac{PU}{PB} - \frac{PV}{PA} = \sqrt{\frac{PU}{PB} \cdot \frac{PV}{PA}} - \sqrt{st}.$$

(2) 若 P 在圆 Ω 上, 则由 $P=U=V$, 知 $PU=PV=0$, 故 $s=t=0$, 因 $\angle APB=90^\circ$, 所以 $\cos \angle APB=0$.

(3) 若 P 在圆 Ω 内, 则

$$\cos \angle APB = \cos(180^\circ - \angle APV) = -\cos \angle APV = -\frac{PV}{PA},$$

$$\cos \angle APB = \cos(180^\circ - \angle BPU) = -\cos \angle BPU = -\frac{PU}{PB},$$

$$\therefore \cos \angle APB = -\sqrt{\frac{PU}{PB} \cdot \frac{PV}{PA}} = -\sqrt{st}.$$

5 锐角二角形 ABC 中, AD 是 BC 边上的高, H 是线段 AD 内任一点, BH 和 CH 的延长线分别交 AC 、 AB 于 E 和 F , 求证: $\angle EDH = \angle FDH$.

【证明 1】●过点 E 作 $EP \perp BC$, 垂足为 P , 过 F 作 $FQ \perp BC$, 垂足为 Q , 设 $EP \cap CH = M$, $FQ \cap BH = N$, 则有 $EP \parallel AD \parallel FQ$, 从而

$$\frac{FN}{FQ} = \frac{AH}{AD} = \frac{EM}{EP}.$$

$$\text{即} \quad \frac{FN}{EM} = \frac{FQ}{EP}. \quad ①$$

注意到 $\triangle EMH \sim \triangle NHF$, 且 DP , DQ 分别为 $\triangle EMH$ 和 $\triangle NHF$ 的对应高, 则有

$$\frac{FN}{EM} = \frac{DQ}{DP}. \quad ②$$

由①②得 $\frac{FQ}{EP} = \frac{DQ}{DP}$, 则 $\triangle FQD \sim \triangle EPD$, 从而 $\angle FDQ = \angle EDP$.

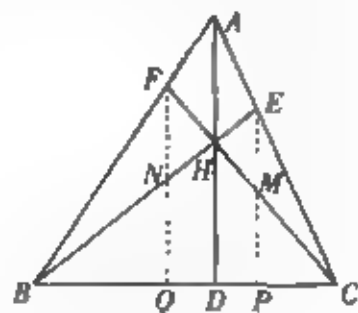
从而 $\angle EDH = \angle FDH$.

【证明 2】过 A 作 $l \parallel BC$, 延长 DF 、 DE 分别交 l 于 P 、 Q . 于是有

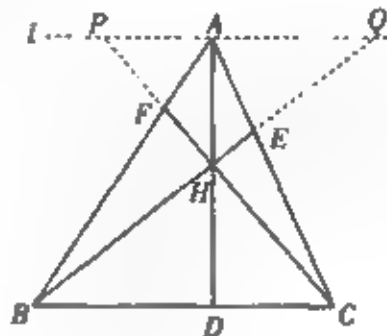
$$\frac{AP}{BD} = \frac{AF}{FB}, \quad \frac{AQ}{DC} = \frac{AE}{EC}. \quad ①$$

又由 Ceva 定理, 有

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \quad ②$$



1994.5 图 1



1994.5 图 2

由①②得 $AP=AQ$.

从而有 $\triangle APD \cong \triangle AQD$.

也即有 $\angle EDH = \angle FDH$.

【证明3】如图以 D 为坐标原点建立平面直角坐标系, 设 $A(0, a)$, $B(-b, 0)$, $C(c, 0)$, $H(0, h)$, $E(u, v)$, $F(-r, s)$, 其中 a, b, c, h, u, v, r, s 均为正实数. 显然, 我们只需证明 $\frac{v}{u} = \frac{s}{r}$.

注意到 A, C, E 共线, 有

$$\frac{v-a}{u-c} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{v}{u} = \frac{u-c}{c} = \frac{u}{c} - 1 \quad (1)$$

又 E, B, H 共线, 有

$$\frac{v}{u+b} = \frac{h}{b} \Rightarrow \frac{v}{h} = \frac{u+b}{b} = \frac{u}{b} + 1 \quad (2)$$

②-①, 得

$$v\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{a}\right) = u\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

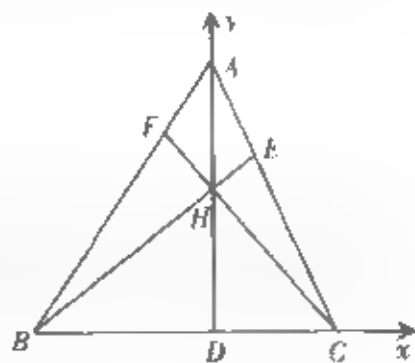
从而

$$\frac{v}{u} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{h} - \frac{1}{a}} = \frac{ah(b+c)}{bc(a-h)},$$

类似地, 我们可用 $-r, s, -c, -b$ 代替 u, v, b, c , 有

$$\frac{s}{r} = \frac{ah(-c-b)}{bc(a-h)}, \text{ 即 } \frac{s}{r} = \frac{ah(b+c)}{bc(a-h)},$$

从而 $\frac{v}{u} = \frac{s}{r}$, 命题得证.



1994.5 图 3

第 27 届加拿大数学奥林匹克(1995)

1 设 $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$, 计算和

$$f\left(\frac{1}{1996}\right) + f\left(\frac{2}{1996}\right) + \cdots + f\left(\frac{1995}{1996}\right).$$

【解】注意到

$$f(1-x) = \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + 3} = \frac{9}{9+3} \cdot \frac{9}{9} = \frac{3}{9^x+3},$$

从而

$$f(x) + f(1-x) = \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{3}{9^x+3} = 1.$$

因此

$$f\left(\frac{1}{1996}\right) + f\left(\frac{1995}{1996}\right) = 1,$$

$$f\left(\frac{2}{1996}\right) + f\left(\frac{1994}{1996}\right) = 1,$$

...

$$f\left(\frac{1995}{1996}\right) + f\left(\frac{1}{1996}\right) = 1,$$

以上各式相加, 知原式 $= \frac{1995}{2} = 997 \frac{1}{2}$.

2 已知 a, b, c 为正实数, 求证:

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

【证明 1】这等价于证明 $a^3 b^3 c^3 \geq (abc)^{a+b+c}$. 因为 a, b, c 完全对称, 不失一般性, 设 $a \geq b \geq c$. 于是 $a-b \geq 0, b-c \geq 0, a-c \geq 0$, 并且 $\frac{a}{b} \geq 1, \frac{b}{c} \geq 1, \frac{a}{c} \geq 1$, 因此

$$\frac{a^3 b^3 c^3}{(abc)^{a+b+c}} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} \left(\frac{b}{c}\right)^{b-c} \left(\frac{a}{c}\right)^{a-c} \geq 1.$$

【证明 2】如果把 a, b, c 分别看成 a, b, c 的权, 那么运用几何—调和平均不等式和算术—几何平均不等式, 我们得到

$$a^a b^b c^c \geq \frac{a^a \cdot b^b + c^c}{a^a + b^b + c^c} \cdot \frac{a^a + b^b + c^c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

由此立得 $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

3 如果一个四边形任意一对边不相交, 且有一个内角大于 180° , 那么我们就称它为“镖形”(如图所示). 设 C 是一个凸 s 边形, 将 C 划分成 q 个四边形, 任意两个四边形不重

叠(也无空隙),设其中有 b 个“镖形”,证明: $q \geq b + \frac{s-2}{2}$.

【证明】 q 个四边形的内角和为 $2q\pi$. 这些四边形有一些顶点是凸 s 边形 C 的顶点,在这些顶点处的内角合在一起是 $(s-2)\pi$. 还有一些顶点在凸 s 边形 C 的内部或边上.



1995.3 图

由于每个“镖形”有一个大于 180° 的内角,称之为优角,显然优角的顶点不是凸 s 边形 C 的顶点,因而一定在 C 的内部. 这样 C 内部的顶点至少 b 个,在这些顶点处的内角和是 $2b\pi$.

于是 $2q\pi \geq 2b\pi + (s-2)\pi$. 从而 $q \geq b + \frac{s-2}{2}$.

4 设 n 是一个固定的正整数,证明:对任何非负整数 k ,下述不定方程

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = y^{3k+2}$$

有无穷多个正整数解 $(x_1, x_2, \dots, x_n; y)$.

【证明】由 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$, 可得当 $k=0$ 时,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n; y) = (1, 2, \dots, n; \frac{n(n+1)}{2})$$

为一组解.

由此,可在一般情况下构造无穷多组解,令 $c = \frac{n(n+1)}{2}$, 并注意到对任意正整数 q , 有

$$\begin{aligned} & (c^k q^{3k+2})^3 + (2c^k q^{3k+2})^3 + \cdots + (nc^k q^{3k+2})^3 \\ &= c^{3k} q^{3(3k+2)} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) \\ &= c^{3k} q^{3(3k+2)} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \\ &= c^{3k+2} q^{3(3k+2)} = (cq^3)^{3k+2}. \end{aligned}$$

也即 $(x_1, x_2, \dots, x_n; y) = (c^k q^{3k+2}, 2c^k q^{3k+2}, \dots, nc^k q^{3k+2}; cq^3)$ 是解, 证毕.

【评注】本题解答的关键在于构造出一组通解, 构造的方式可以不同, 以下再给出两个不同的构造方法:

【别证 1】对任意正整数 q , 取 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = n^{2k+1} q^{3k+2}$, $y = n^2 q^3$. 则

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = n(n^{2k+1} q^{3k+2})^3 = n^{2(3k+2)} q^{3(3k+2)} = y^{3k+2}.$$

【别证 2】若 $n=1$, 取 $x_1 = q^{3k+2}$, $y = q^3$, 即为一组解, 对于 $n>1$, 我们寻求形如

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = n^p, y = n^q$$

的通解. 则有

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 &= y^{3k+2} \Leftrightarrow n^{3p+1} = n^{(3k+2)q} \\ &\Leftrightarrow 3p+1 = (3k+2)q \Leftrightarrow (3k+2)q - 3p = 1. \end{aligned}$$

最后一个等式的一组通解为 $q = 3t+2, p = (3k+2)t + (2k+1)$ (t 为非负整数), 从而方程有无穷多组解:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = n^{(3k+2)t + (2k+1)}, y = n^{3t+2}.$$

5 设 u 为区间 $(0, 1)$ 内一实参数, 定义

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq u, \\ 1 - (\sqrt{ux} + \sqrt{(1-u)(1-x)})^2 & u \leq x \leq 1. \end{cases}$$

数列 $\{u_n\}$ 如下递归定义:

$$u_1 = f(1), u_n = f(u_{n-1}) \quad (n > 1).$$

求证: 一定存在正整数 k , 使得 $u_k = 0$.

【证明】易见 $u_1 = 1 - u$, 由于对所有 $x \in [u, 1], u \leq x$ 且 $1 - x \leq 1 - u$, 我们得到

$$\begin{aligned} & 1 - (\sqrt{ux} + \sqrt{(1-u)(1-x)})^2 \\ &= 1 - ux - (1-u)(1-x) - 2\sqrt{ux(1-u)(1-x)} \\ &= u + x - 2ux - 2\sqrt{ux(1-u)(1-x)} \\ &\leq u + x - 2ux - 2u(1-x) = x - u. \end{aligned}$$

因此, $f(x) = 0$, 若 $0 \leq x \leq u$, ①

$f(x) \leq x - u$, 若 $u \leq x \leq 1$, ②

若 $u_1 = 1 - u \geq u$, 由②, 有 $u_2 = f(u_1) \geq u_1 - u = 1 - 2u$, 简单归纳, 知对 $i = 1, 2, \dots, n$, 若 $u_i \geq u$, 则

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n - u \leq 1 - (n+1)u.$$

于是对某个充分大的 k , 必可使 $u_{k-1} < u$, 从而 $u_k = f(u_{k-1}) = 0$.

第28届加拿大数学奥林匹克(1996)

1 如果 α, β, γ 是方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 的根, 求 $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ 的值.

【解】设 $f(x) = x^3 - x - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 有根 α, β, γ , 则根据多项式根的有关结论可得如下结果:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1, \alpha\beta\gamma = 1.$$

于是

$$\begin{aligned} & \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \\ &= 2 \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma} \right) - 3 \\ &= 2 \cdot \frac{3 - 2(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} - 3 \\ &= \frac{4}{f(1)} = 3 + 7. \end{aligned}$$

2 求方程组

$$\begin{cases} \frac{4x^2}{1+4x} = y, \\ \frac{4y^2}{1+4y} = z, \\ \frac{4z^2}{1+4z} = x, \end{cases}$$

的所有实数解, 并证明你的结论.

【解1】显然, x, y, z 均为非负实数, 设 $x=y$, 则 $x=y=z$.

由 $4x^2 = x + 4x^3$, 得 $x=0$ 或 $\frac{1}{2}$.

设 $x > y$, 则有 $y = \frac{4x^2}{1+4x} = 1 - \frac{1}{1+4x} > 1 - \frac{1}{1+4y^2} = \frac{4y^2}{1+4y^2} = z$, 及

$$z = \frac{4y^2}{1+4y^2} = 1 - \frac{1}{1+4y^2} > 1 - \frac{1}{1+4z^2} = \frac{4z^2}{1+4z^2} = x,$$

从而 $x > y > z > x$, 矛盾! 同理, $x < y$ 亦可推出矛盾, 故只能 $x=y=z$, 故而原方程组仅有两组解:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ 或 } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

【解2】注意到 x, y, z 非负, 把方程组中三式相加得

$$x+y+z=\frac{4x^2}{1+4x^2}+\frac{4y^2}{1+4y^2}+\frac{4z^2}{1+4z^2},$$

移项并整理,得

$$\frac{x(2x-1)^2}{1+4x^2}+\frac{y(2y-1)^2}{1+4y^2}+\frac{z(2z-1)^2}{1+4z^2}=0,$$

由于每一项是非负的,所以每一项必须是0.因此每一个变量是0或 $\frac{1}{2}$.经验证原方程组

仅有解 $x=y=z=0$ 和 $x=y=z=\frac{1}{2}$.

【解3】显然, x, y, z 均为非负实数, 易知若 x, y, z 中有一个为0, 则必有 $x=y=z=0$, 不妨设 $x, y, z > 0$, 三式相乘, 有

$$\frac{64x^2y^2z^2}{(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)}=xyz.$$

$$\text{从而 } (1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)=64xyz.$$

而由基本不等式, 有

$$(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2) \geq 4x \cdot 4y \cdot 4z = 64xyz,$$

当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时取等号.

从而原方程组仅有两组解:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ 或 } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

3 a_1, a_2, \dots, a_n 是正整数 $1, 2, \dots, n$ 的任一排列. 设 $f(n)$ 是下述排列的数目, 它们满足条件:

$$(I) a_1 = 1;$$

$$(II) a_i - a_{i-1} \leq 2, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

试问 $f(1996)$ 能否被3整除.

【解】我们把满足条件(I)、(II)的排列 a_1, a_2, \dots, a_n 称作 n 项正则排列. 对于 n 个数的正则排列, 由于 $a_1 = 1$, 故 $a_2 = 2$ 或 3 .

(1) 若 $a_2 = 2$, 则 a_2, a_3, \dots, a_n (的各项减去1后) 是 $n-1$ 项的正则排列, 其个数为 $f(n-1)$.

(2) 若 $a_2 = 3, a_3 = 2$, 则必有 $a_4 = 4$, 故 a_4, a_5, \dots, a_n (的各项减去3后) 是 $n-3$ 项的正则排列, 其个数为 $f(n-3)$.

(3) 若 $a_2 = 3, a_3 \geq 4$, 设 a_k 是该排列中第一个出现的偶数, 则前 k 个数应该是 $1, 3, 5, \dots, 2k-1, a_k$ 是 $2k$ 或 $2k-2$. 因此, a_k 与 a_{k+1} 是相邻整数.

由条件(I), 这排列在 a_{k+1} 后的各数, 要么都小于它, 要么都大于它, 因为2在 a_k 之后, 故 a_{k+2}, \dots, a_n 均比 a_{k+1} 小.

这只有一种可能,即先依递增次序排出所有 $\leq n$ 的正奇数,再接着依次递减次序排出所有 $\leq n$ 的正偶数.

综上,有递推关系

$$f(n) = f(n-1) + f(n-3) + 1, n \geq 4.$$

容易算出: $f(1)=1, f(2)=1, f(3)=2, f(4)=4$,各项模3的余数依次为

$$1, 1, 2, 1, 0, 0, 2, 0, 1, 1, 2, 1, \dots$$

它们构成以8为周期的数列.又 $1996 = 249 \times 8 + 4$,故

$$f(1996) \equiv f(4) \equiv 1 \pmod{3}.$$

故 $f(1996)$ 不能被3整除.

4 已知等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle B$ 的平分线与 AC 交于 D ,且 $BC=BD+AD$,求 $\angle A$.

【解1】在 BC 上取一点 E ,使得 $BE=BD$,则 $EC=AD$.

由角平分线定理,有

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{EC}{DC}.$$

又 $\angle C$ 共用,故 $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

设 $\angle ABD = \angle CBD = \theta$,则

$$\angle CDE = \angle DCE = 2\theta,$$

$$\angle BDE = \angle BED = 4\theta,$$

从而 $9\theta = 180^\circ, \theta = 20^\circ, \angle A = \angle CED = 5\theta = 100^\circ$.

【解2】设 $\angle ABD = \angle CBD = \theta$,对 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BDC$ 利用正弦定理,得到

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin \theta}{\sin 4\theta} \text{ 和 } 1 + \frac{AD}{BD} = \frac{BC}{BD} = \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta},$$

所以

$$1 + \frac{\sin \theta}{\sin 4\theta} = \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta},$$

化简,得

$$\sin 4\theta + \sin \theta = 2 \sin 3\theta \cos 2\theta = \sin 5\theta + \sin \theta.$$

从而 $\sin 4\theta = \sin 5\theta$.注意到 $2\theta < 90^\circ$,则 $5\theta = 180^\circ - 4\theta$,从而 $\theta = 20^\circ, \angle A = 180^\circ - 4\theta - 5\theta = 100^\circ$.

5 设 r_1, r_2, \dots, r_m 是给定的 m 个正有理数,且 $\sum_{i=1}^m r_i = 1$.对任意正整数 n ,定义

$$f(n) = n - \sum_{i=1}^m [r_i n].$$

求 $f(n)$ 的最大值和最小值.

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

【解】

$$f(n) = n - \sum_{i=1}^m [r_i n]$$

$$= n \sum_{k=1}^m r_k - \sum_{k=1}^m [r_k n]$$

$$= \sum_{k=1}^m (r_k n - [r_k n])$$

因为 $0 \leq r_k n - [r_k n] < 1, k=1, 2, \dots, m$, 故 $0 \leq f(n) < m$. 又 $f(n)$ 为整数, 故 $0 \leq f(n) \leq m-1$.

设 $r_k = \frac{a_k}{b_k}$, 记 $l = [b_1, b_2, \dots, b_m]$.

取 $n=l$, 则 $r_k l$ 为整数, 此时 $r_k l - [r_k l] = 0$, 从而 $f(l) = 0$.

取 $n=l-1$, 则

$$\begin{aligned} f(l-1) &= \sum_{k=1}^m (r_k l - r_k - [r_k l - r_k]) \\ &= \sum_{k=1}^m (1 - r_k) = m-1. \end{aligned}$$

综上, $f(n)$ 的最大值和最小值分别为 $m-1$ 和 0 .

第29届加拿大数学奥林匹克(1997)

1 有多少对正整数 x, y 满足 $x < y$ 并且最大公约数 $(x, y) = 5!$, 最小公倍数 $[x, y] = 50!$?

【解】●设 7 到 47 的素数从小到大分别是 p_1, p_2, \dots, p_{15} , 则

$$5! = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot p_1^1 \cdot p_2^1 \cdot \dots \cdot p_{15}^1,$$

$$50! = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_{15}^{b_{15}}.$$

$\because x | 50!, y | 50!$, 故 x, y 具有如下形式:

$$x = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \dots \cdot p_{15}^{n_{15}},$$

$$y = 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdot \dots \cdot p_{15}^{m_{15}},$$

其中, $\max\{n_i, m_i\}$ 是 $50!$ 的第 i 个素因子的次数, $\min\{n_i, m_i\}$ 是 $5!$ 的第 i 个素因子的次数.

每个 $n_i (i=1, 2, \dots, 15)$ 的选取方式有两种, 故 x 的个数为 2^{15} . 当 x 选定时, y 是唯一确定的, 在这些 (x, y) 组中有一半满足 $x < y$, 故满足题设条件的正整数对有 $\frac{2^{15}}{2} = 2^{14}$ 个.

2 闭区间 $A = [0, 50]$ 是有限个闭区间的并集, 这些区间的长度均为 1, 证明: 可以从中去掉一些闭区间, 使得剩下的闭区间互不相交(即交集为空集), 并且总长度 ≥ 25 .

【证明】任一区间 $[x, x+1) (0 \leq x < 49)$ 被组成 A 的闭区间覆盖, 这些长为 1 的闭区间中必有一个左端点落在 $[x, x+1)$ 中, 取左端点分别属于

$$[0, 1), [2, 3), \dots, [2k, 2k+1), \dots, [48, 49)$$

的 25 个闭区间, 这些区间的右端点分别在

$$[1, 2), [3, 4), \dots, [2k+1, 2k+2), \dots, [49, 50)$$

中, 因此它们互不相交, 并且总长为 25.

3 求证: $\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$.

【证明】
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{1997}{1998}$$

$$< \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \dots \cdot \frac{1997}{1999} = \frac{1}{1999}.$$

又
$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{1997}{1998} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 &< \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{1997}{1998} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{1998}{1999} \\
 &= \frac{1}{1999} < \frac{1}{1936} = \frac{1}{44^2}.
 \end{aligned}$$

从而 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$.

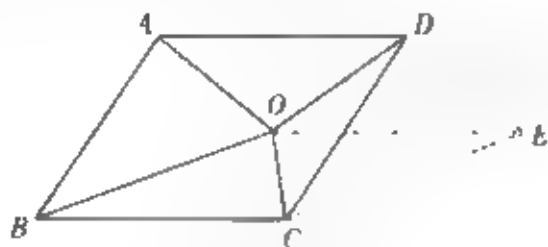
4 已知平行四边形 $ABCD$ 内一点 O 满足 $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$, 求证: $\angle OBC = \angle ODC$.

【证明】沿向量 \overrightarrow{AD} 平移 $\triangle ABO$ 到 $\triangle CDE$, 则有四边形 $EOBC$ 为平行四边形. 注意到

$$\begin{aligned}
 &\angle DEC + \angle COD \\
 &\quad \angle AOB + \angle COD = 180^\circ,
 \end{aligned}$$

则 E, C, O, D 四点共圆.

从而有 $\angle ODC = \angle OEC = \angle OBC$.



1997.4 图

5 将和式 $\sum_{k=0}^n k^3 \frac{(-1)^k C_n^k}{k^3 + 9k^2 + 26k + 24}$ 写成 $\frac{p(n)}{q(n)}$ 的形式, 这里 $p(n), q(n)$ 是 n 的整系数多项式.

$$\begin{aligned}
 \text{【证明】原式} &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{(k+2)(k+3)(k+4)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (C_{n+1}^{k+1} - C_{n+1}^{k+2})}{(k+2)(k+3)(k+4)} \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{(n+1)!}{(k+4)!(n-k)!} - \frac{n!}{(k+4)!(n-k-1)!} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{(-1)^k C_{n+1}^{k+1}}{(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{(-1)^k C_{n+1}^{k+2}}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\
 &= \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \sum_{k=0}^{n+1} \left((-1)^k C_{n+1}^k - 1 + C_{n+1}^1 - C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 \right) \\
 &\quad - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sum_{k=0}^{n+1} \left((-1)^k C_{n+1}^k - 1 + C_{n+1}^1 - C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 \right)
 \end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k = (1-1)^{n+1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^{k+1} = (1-1)^{n+1} = 0,$$

$$(n+1)(-1 + C_{n+1}^1 - C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3) = \frac{(n+1)^2(n+2)(n+3)}{6},$$

$$(n+4)(-1 + C_{n+1}^1 - C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+4)}{6},$$

$$\begin{aligned}\text{则有原式} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ &\quad \left(\frac{(n+1)^2(n+2)(n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(n+2)(n+4)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{2(n+3)(n+4)}.\end{aligned}$$

第30届加拿大数学奥林匹克(1998)

1 求满足下面方程的实数 a :

$$\left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{a}{3}\right] + \left[\frac{a}{5}\right] = a.$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

【解1】●由 $x-1 < [x] \leq x$, 可得

$$a > \left(\frac{a}{2} - 1\right) + \left(\frac{a}{3} - 1\right) + \left(\frac{a}{5} - 1\right) = \frac{31}{30}a - 3,$$

$$a \leq \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{5} = \frac{31}{30}a.$$

解得

$$0 \leq a < 90.$$

又由方程知 a 是非负整数, 故

$$a \geq \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{a}{3} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{a}{5} - \frac{4}{5}\right).$$

$$\therefore a \leq 59.$$

由题设可知: $\left\{\frac{a}{2}\right\} + \left\{\frac{a}{3}\right\} + \left\{\frac{a}{5}\right\} = \frac{1}{30}a$.

且 $\left\{\frac{a}{2}\right\} = 0, \frac{1}{2}, \left\{\frac{a}{3}\right\} = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \left\{\frac{a}{5}\right\} = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$, 故共有 $2 \times 3 \times 5 = 30$ 个.

又 $15i + 10j + 6k (i=0, 1, j=0, 1, 2, k=0, 1, 2, 3, 4)$ 是方程的解, 所以, $a = 15i + 10j + 6k (i=0, 1, j=0, 1, 2, k=0, 1, 2, 3, 4)$.

【解2】●由条件式知 a 为整数, 设 $a = 30k + r (k, r \in \mathbb{Z} \text{ 且 } 0 \leq r < 30)$. 则

$$\left[\frac{a}{2}\right] = 15k + \left[\frac{r}{2}\right], \left[\frac{a}{3}\right] = 10k + \left[\frac{r}{3}\right], \left[\frac{a}{5}\right] = 6k + \left[\frac{r}{5}\right].$$

代入方程, 并化简得 $k = r - \left[\frac{r}{2}\right] - \left[\frac{r}{3}\right] - \left[\frac{r}{5}\right]$.

易知, 每一个 r , 对应着一个整数 k , 也即每一个 r 对应着方程的一个解, 从而本题的解为

$$a = 30k + r (k = r - \left[\frac{r}{2}\right] - \left[\frac{r}{3}\right] - \left[\frac{r}{5}\right], r = 0, 1, 2, \dots, 29).$$

2 在实数范围内解方程

● 本解答属于伍能.

● 本解答属于 David Arthur (Upper Canada College, Toronto, ON).

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.$$

【解1】由 $\begin{cases} x - \frac{1}{x} \geq 0, \\ 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \end{cases}$ 得 $x \geq 1$.

又 $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}},$ ①

故有 $\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x + 1},$

即 $\frac{x+1}{x} = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}},$ ②

①+②, 得 $x + \frac{x+1}{x} = 2\sqrt{x - \frac{1}{x}},$

两边平方并化简, 得

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0,$$

也即 $(x^2 - x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (负根舍去).

【解2】显然 $x > 0$, 两边平方, 得

$$x^2 = (x - \frac{1}{x}) + (1 - \frac{1}{x}) + 2\sqrt{(x - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{x})}.$$

移项, 通分, 整理, 得

$$x^3 - x^2 - x + 2 = 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1},$$

从而 $x^3 - x^2 - x + 1 - 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} + 1 = 0,$

即 $(\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} - 1)^2 = 0,$

从而 $\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} = 1,$

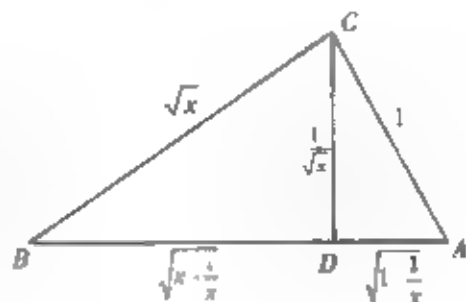
则有 $x^3 - x^2 - x + 1 = 1$, 即 $x^3 - x^2 - x = 0$, 故 $x^2 - x - 1 = 0$.

解之得, $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (负根舍去).

【解3】由题设易得 $x > 1$, 如图, 取同一直线 l 连续一点

A, D, B , 使得 $AD = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}, DB = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$, 作 AB 的垂线

DC , 使得 $DC = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 则由勾股定理得, $AC = 1, BC = \sqrt{x}$, 且由



1998.2 图

题设知 $AB = x$, 在 $\triangle ABC$ 中, 设 AC 边上的高为 h , 则由

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}AC \cdot h,$$

得
$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h,$$

从而 $h = \sqrt{x} = BC$, 故 $BC \perp AC$, $\angle ACB = 90^\circ$.

即有 $x^2 = x + 1$, 解之得 $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (负根舍去).

3 已知自然数 $n \geq 2$, 求证:

$$\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right) > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

【证明 1】原不等式等价于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right) > \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ & > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) > \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) > \frac{2n+1}{2n(n+1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\ \Leftrightarrow & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

上面这个不等式显然, 故原不等式成立.

【证明 2】注意到 $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$, \cdots , $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, 则

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad (1)$$

又
$$\frac{n}{2} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n \text{ 个}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

故
$$\frac{1}{2} > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right), \quad (2)$$

将②代入①, 得

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \\ & > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ & = \frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right), \end{aligned}$$

从而, $\frac{1}{n+1}(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}) > \frac{1}{n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n})$.

4 在三角形 ABC 中, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, D 和 E 分别是边 AC 和 AB 上点, 使得 $\angle CBD = 40^\circ$, $\angle BCE = 70^\circ$, F 是直线 BD 和 CE 的交点. 证明: 直线 AF 和直线 BC 垂直.

【证明 1】易知 $\angle BCA = 80^\circ$, $\angle BCF = 70^\circ$, 设 $\angle BAF = \theta$, 由角元塞瓦定理知

$$\frac{\sin \angle CAF}{\sin \angle BAF} \cdot \frac{\sin \angle ABF}{\sin \angle CBF} \cdot \frac{\sin \angle BCF}{\sin \angle ACF} = 1.$$

即
$$\frac{\sin(40^\circ - \theta)}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} \cdot \frac{\sin 70^\circ}{\sin 10^\circ} = 1.$$

注意到 $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$, $\sin 40^\circ = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ$, 则有

$$2 \sin 10^\circ \sin \theta = \sin(40^\circ - \theta) = \sin 40^\circ \cos \theta - \sin \theta \cos 40^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } \tan \theta &= \frac{\sin 40^\circ}{2 \sin 10^\circ + \cos 40^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{2 \sin 10^\circ + \cos(30^\circ + 10^\circ)} \\ &= \frac{\sin 40^\circ}{2 \sin 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 10^\circ - \frac{1}{2} \sin 10^\circ} \\ &= \frac{\sin 40^\circ}{\frac{3}{2} \sin 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 10^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sqrt{3} \sin(10^\circ + 30^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

从而 $\theta = 30^\circ$, 则 $AF \perp BC$.

【证明 2】首先 $\sin 80^\circ = 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ$

$$= 2 \sin 40^\circ \cos(60^\circ - 20^\circ)$$

$$= 2 \sin 40^\circ (\cos 60^\circ \cos 20^\circ + \sin 60^\circ \sin 20^\circ)$$

$$= \sin 40^\circ (\cos 20^\circ + \sqrt{3} \sin 20^\circ),$$

$$\text{所以, } \frac{\sin 80^\circ - \sin 40^\circ \cos 20^\circ}{\sin 40^\circ \sin 20^\circ} = \sqrt{3}.$$

如图所示, 不妨设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\frac{1}{2}$, 则 $BC = \sin 40^\circ$,

$$AB = \sin 80^\circ.$$

易知 $\angle BFC = 70^\circ = \angle BCF$, 故

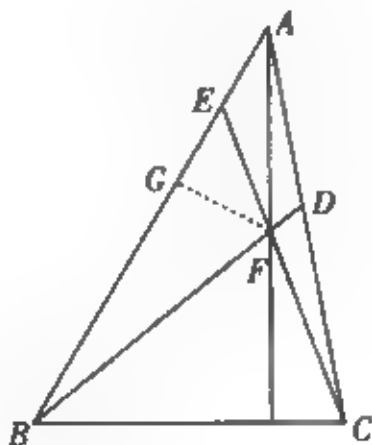
$$BF = BC = \sin 40^\circ.$$

作 $GF \perp AB$, 垂足为 G , 则

$$BG = \sin 40^\circ \cos 20^\circ, GF = \sin 40^\circ \sin 20^\circ,$$

此即

$$\frac{AG}{GF} = \frac{AB - BG}{GF} = \sqrt{3}.$$



1998.4 图

所以, $\angle BAF = 30^\circ$. 于是 $AF \perp BC$.

【证明 3】● 设 $BC = 1$, 分别在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCF$ 中用正弦定理, 得 $AB = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}$, $AC = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ}$, $BF = \frac{\sin 70^\circ}{\sin 70^\circ}$, $CF = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}$, 而

$$\begin{aligned} AF \perp BC &\Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = BF^2 - CF^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin^2 80^\circ - \sin^2 60^\circ}{\sin^2 40^\circ} = \frac{\sin^2 70^\circ - \sin^2 40^\circ}{\sin^2 70^\circ} \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}(\cos 120^\circ - \cos 160^\circ)}{\sin^2 40^\circ} = \frac{\frac{1}{2}(\cos 80^\circ - \cos 140^\circ)}{\sin^2 70^\circ} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin 140^\circ \sin 20^\circ}{\sin^2 40^\circ} = \frac{\sin 110^\circ \sin 30^\circ}{\sin^2 70^\circ} \\ &\Leftrightarrow \sin 40^\circ \sin 30^\circ = \sin 20^\circ \sin 70^\circ \\ &\Leftrightarrow \sin 40^\circ = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ. \end{aligned}$$

这是显然的, 故命题得证.

5 设 m 是一个正整数, 数列 $\{a_n\}$ 定义为:

$$a_0 = 0, a_1 = m, a_{n+1} = m^2 a_n - a_{n-1}, n \geq 1.$$

证明: 一个有序非负整数对 (a, b) (其中 $a < b$) 是方程 $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$ 的解的充分必要条件是 (a, b) 具有 (a_n, a_{n+1}) 的形式, 其中 $n \geq 0$.

【证明】首先我们用数学归纳法证明:

$$\text{对任意 } n \geq 0, \text{ 都有 } \frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{a_n a_{n+1} + 1} = m^2.$$

$$\text{当 } n=0 \text{ 时, } \frac{a_0^2 + a_1^2}{a_0 a_1 + 1} = \frac{0 + m^2}{0 + 1} = m^2.$$

假设当 $n=k(k \geq 0)$ 时结论成立, 也即有 $\frac{a_k^2 + a_{k+1}^2}{a_k a_{k+1} + 1} = m^2$, 则

$$a_k^2 + a_{k+1}^2 = m^2 a_k a_{k+1} + m^2,$$

$$\text{从而 } a_{k+1}^2 + m^4 a_{k+1}^2 - 2m^2 a_k a_{k+1} + a_k^2 = m^2 + m^4 a_{k+1}^2 - m^2 a_k a_{k+1},$$

$$\text{即 } a_{k+1}^2 + (m^2 a_{k+1} - a_k)^2 = m^2 + m^2 a_{k+1} (m^2 a_{k+1} - a_k),$$

$$\text{由递推关系, 得 } a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 = m^2 + m^2 a_{k+1} a_{k+2},$$

$$\text{也即 } \frac{a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2}{a_{k+1} a_{k+2} + 1} = m^2.$$

综上, 结论对任意 $n \geq 0$ 均成立, 也即对任意 $n \geq 0, (a_n, a_{n+1})$ 为方程 $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = m^2$ 的解.

其次, 我们证明: 方程 $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = m^2 (0 < a < b)$ 的任一组解均具有形式 (a_n, a_{n+1}) .

设 $(a, b) (a < b)$ 为方程 $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = m^2$ 的一组解, 则必有 $a \geq m$.

反设 $0 < a < m$, 把上面的方程写成关于 b 的一元二次方程的形式:

$$b^2 - (m^2 a)b + (a^2 - m^2) = 0.$$

设这个方程的另一个根为 b_1 , 由韦达定理, 得

$$\begin{cases} b_1 + b = m^2 a, & \text{①} \\ b_1 b = a^2 - m^2 & \text{②} \end{cases}$$

由①知, b_1 是整数, 由②知, $b_1 < 0$, 于是 b_1 为负整数, 从而

$$m^2 = \frac{a^2 + b_1^2}{ab_1 + 1} < 0,$$

矛盾, 所以 $a \geq m$.

而由上面过程来看, 只要 $m < a < b$, b 总可以用另一个正整数 b_1 取代, 并且 $b_1 b = a^2 - m^2 < a^2 < ab$, 所以 $b_1 < a$.

这样, 由对称性, 一组解 (a, b) 就可以用 (b_1, a) 来替代了, 此处 $b_1 = m^2 a - b$.

这一过程不可能无限地进行下去, 而由上述论证知, 最后总能化到 $(0, m)$ 这组“基本解”. 以上每步都可以逆推的, 最后便知 (a, b) 必定是数列 $\{a_n\}$ 的连续两项.

第 31 届加拿大数学奥林匹克(1999)

1 求方程 $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$ 的所有实数解.

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

【解】由题设得 $40[x] = 4x^2 + 51$.

由 $x-1 < [x] \leq x$ 可得

$$\begin{aligned} & 40(x-1) < 4x^2 + 51 \leq 40x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4x^2 - 40x + 91 > 0, \\ 4x^2 - 40x + 51 \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (2x-13)(2x-7) > 0, \\ (2x-17)(2x-3) \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x > \frac{13}{2} \text{ 或 } x < \frac{7}{2}, \\ \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{17}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \frac{3}{2} \leq x < \frac{7}{2} \text{ 或 } \frac{13}{2} < x \leq \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

(1) 当 $\frac{3}{2} \leq x < \frac{7}{2}$ 时, $[x] = 1$ 或 2 或 3.

若 $[x] = 1$, 则 $4x^2 + 51 = 40 \Rightarrow 4x^2 = -11$ 不可能;

若 $[x] = 2$, 则 $4x^2 + 51 = 80 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{2}$, 符合题设;

若 $[x] = 3$, 则 $4x^2 + 51 = 120 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{69}}{2} > \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$, 矛盾.

(2) 当 $\frac{13}{2} < x \leq \frac{17}{2}$ 时, $[x] = 6$ 或 7 或 8.

若 $[x] = 6$, 则 $4x^2 + 51 = 240 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{189}}{2}$, 符合题设;

若 $[x] = 7$, 则 $4x^2 + 51 = 280 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{229}}{2}$, 符合题设;

若 $[x] = 8$, 则 $4x^2 + 51 = 320 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{269}}{2}$, 符合题设.

综上, 方程的实数解为 $x = \frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{189}}{2}, \frac{\sqrt{229}}{2}, \frac{\sqrt{269}}{2}$.

2 已知正三角形 ABC 的高为 1, 一个半径为 1 且圆心与 C 在 AB 同侧的圆沿线段 AB 滚动.

证明: 该圆在三角形 ABC 内的弧长为定值.

【证明 1】设 AC 延长线交 $\odot O$ 于 E , BC 交 $\odot O$ 于 D . 如图, 易知 $OC \parallel AB$, 则

$$\begin{aligned}\angle BCO &= \angle CBA = 60^\circ, \\ \angle ECO &= \angle CAB = 60^\circ.\end{aligned}$$

所以, $\angle BCO = \angle ECO$.

注意到 OC 所在直线为 $\odot O$ 的对称轴, 则 D, E 两点为关于 OC 对称的两点, 从而 $CD = CE$,

$$\text{故 } \angle CED = \angle CDE = \frac{1}{2} \angle ACD = 30^\circ.$$

则 $\odot O$ 夹在 $\triangle ABC$ 的弧 \widehat{DF} 的长为 $2\pi \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{3}$ 为定值.

【证明 2】易知 $CO \parallel AB$, 以 C 为原点, CO 所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系, 则 $A(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1), B(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$, 设 $O(a, 0)$, 则 $\odot O$ 方程为

$$(x-a)^2 + y^2 = 1,$$

由题设 $\odot O$ 在 AB 上滚动, 则 $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, CA, CB 方程分别为 $y = -\sqrt{3}x$ 与 $y = \sqrt{3}x$.

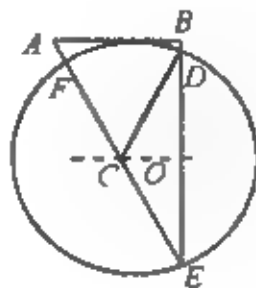
将以上两直线分别与 $\odot O$ 方程联立, 解得

$$x_D = \frac{a + \sqrt{4-3a^2}}{4}, x_F = \frac{a - \sqrt{4-3a^2}}{4},$$

$$\begin{aligned}\text{从而 } |DF|^2 &= (x_D - x_F)^2 + (\sqrt{3}x_D - (-\sqrt{3}x_F))^2 \\ &= \frac{4-3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = 1.\end{aligned}$$

所以 $DF = 1, OD = OF$, 故 $\triangle ODF$ 为正三角形. 则

$$\widehat{DF} = \frac{\pi}{3} \cdot 1 = \frac{\pi}{3} \text{ 为定值.}$$



1999.2 图

3 试求所有满足方程 $n = (d(n))^2$ 的正整数 n , 这里 $d(n)$ 表示 n 的正因数的个数.

【解】显然 $n = 1$ 是方程的一个解.

当 $n > 1$ 时, 设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$, 其中 p_1, p_2, \dots, p_m 是不同的素数, α_i 为正整数, 注意到 $d(n)$ 是整数, 则 n 必为完全平方数, 从而 α_i 均为偶数, 记 $\alpha_i = 2\beta_i (1 \leq i \leq m)$, 则

$$d(n) = (2\beta_1 + 1)(2\beta_2 + 1) \cdots (2\beta_m + 1).$$

显然 $d(n)$ 为奇数, 则 n 也为奇数. 从而 $p_i \geq 3 (1 \leq i \leq m)$, 则

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m} = (2\beta_1 + 1)(2\beta_2 + 1) \cdots (2\beta_m + 1).$$

以下先证一个引理:

对任意正整数 t 和 $p (p \geq 3)$, 均有 $p^t \geq 2t + 1$, 当且仅当 $p = 3, t = 1$ 时取等号.

引理的证明: 我们对 t 进行归纳.

当 $t = 1$ 时, 由 $p \geq 3$ 得 $p^1 = 3^1 \geq 2 \cdot 1 + 1$.

设当 $t = k$ 时, 命题成立, 即 $p^k \geq 2k + 1$.

则当 $t = k + 1$ 时

$$\begin{aligned} p^{k+1} - p^k \cdot p &\geq 3p^k = p^k + 2p^k > p^k + 2 \\ &\geq 2k + 1 + 2 = 2(k + 1) + 1. \end{aligned}$$

即当 $t = k + 1$ 时, 命题成立.

综上, 对任意正整数 t , 均有 $p^t \geq 2t + 1$, 当且仅当 $p = 3, t = 1$ 时取等号, 引理得证.

回到原题, 注意到 $p_i \geq 3 (1 \leq i \leq m)$, 则 $p_i^{\beta_i} \geq 2\beta_i + 1$, 且当 $p_i > 3$ 时, 有 $p_i^{\beta_i} > 2\beta_i + 1$, 从而, 若存在 $p_i > 3 (1 \leq i \leq m)$, 则

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m} > (2\beta_1 + 1)(2\beta_2 + 1) \cdots (2\beta_m + 1).$$

故只能 $m = 1, p_1 = 3, \beta_1 = 1$, 即 $n = 3^2 = 9$.

综上, 适合方程的正整数 n 仅有 1 和 9.

4 已知 $\{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ 为集合 $S = \{1, 2, \dots, 17\}$ 的一个 8 元子集.

(I) 证明: 存在正整数 k , 使得方程 $a_i - a_j = k (1 \leq i, j \leq 8)$ 至少有三组不同的解;

(II) 给出一个 7 元子集, 使得对任意正整数 k , 方程 $a_i - a_j = k$ 均不存在三组不同的解.

(I) 【证明 1】不妨设 $a_1 < a_2 < \dots < a_8$, 记 $d_i = a_{i+1} - a_i (i = 1, 2, \dots, 7)$, 假设不存在满足题设的整数 k , 则在 d_i 中至多有 2 个 1, 2 个 2 和 2 个 3 (否则, 所求方程将有三组不同的解). 注意到

$$\begin{aligned} 16 &= 17 - 1 \geq a_8 - a_1 \\ &= (a_8 - a_7) + (a_7 - a_6) + \dots + (a_2 - a_1) \\ &\geq 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 16. \end{aligned}$$

这表明, 7 个差数 d_1, d_2, \dots, d_7 中恰有 2 个 1, 2 个 2, 2 个 3 和 1 个 4. 考察这 7 个差数的排列情况, 由于已经有 2 个 2, 2 个 3 和 1 个 4, 所以

(1) 两个 1 不能相邻, 1 和 2 也不能相邻;

(2) 1 和 3, 2 和 2 至多 1 组相邻.

这样我们只能排成如下两种形式 (或其对称形式):

(a) 1, 4, —, —, —, 3, 1.

(b) 1, 4, 1, 3, , , —.

横线上的数字为两个 2, 1 个 3.

对于(a), 由(2)两个 2 不相邻, 故只能为 1, 4, 2, 3, 2, 3, 1, 显然有 3 组相邻之和为 5, 矛盾.

对于(b), 由(2)两个 2 不相邻, 故只能有 1, 4, 1, 3, 2, 3, 2, 同样会出现 3 组 5, 矛盾.

从而, 必存在正整数 k , 使得方程 $a_i - a_j = k$ 至少有二组不同的解.

【证明 2】不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_8$, 记 $d_i = a_{i+1} - a_i (i=1, 2, \cdots, 7)$, $b_i = a_{i+2} - a_i (i=1, 2, \cdots, 6)$ 共 13 个数, 若不存在满足条件的 k , 则这 13 个数中至多有两个 1, 两个 2, 两个 3, 两个 4, 两个 5, 两个 6, 从而

$$\sum_{i=1}^7 d_i + \sum_{i=1}^6 b_i \geq 2 \cdot (1+2+3+4+5+6) + 7 \geq 49. \quad ①$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \sum_{i=1}^7 d_i + \sum_{i=1}^6 b_i &= \sum_{i=1}^7 (a_{i+1} - a_i) + \sum_{i=1}^6 (a_{i+2} - a_i) \\ &= (a_8 - a_1) + (a_8 + a_7 - a_2 - a_1) \\ &= 2(a_8 - a_1) + (a_7 - a_2) \\ &\leq 2 \cdot (17-1) + (16-2) = 46. \end{aligned}$$

与①矛盾!

综上, 存在正整数 k , 使得方程 $a_i - a_j = k$ 至少有二组不同的解.

(II) 【解】考察 S 的 7 元子集 $A = \{1, 2, 4, 7, 11, 16, 17\}$, 它的 21 对元素的差值共有 1, 3, 5, 6, 9, 10, 15 各两个, 2, 4, 7, 12, 13, 14 各 1 个, 没有 3 个差数有相同的值, 故 A 即为一个所求子集.

【注】问题(II)中不同的选法有很多种, 如 $\{1, 2, 3, 5, 8, 12, 17\}$ 亦合乎要求.

5 非负实数 x, y, z 满足 $x+y+z=1$, 求证:

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27},$$

并确定等号成立的条件.

【证明】记 $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$, 不妨设 $x \geq y, z$, 则

$$\begin{aligned} &f\left(x + \frac{z}{2}, y + \frac{z}{2}, 0\right) - f(x, y, z) \\ &= \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 \left(y + \frac{z}{2}\right) - (x^2y + y^2z + z^2x) \\ &= yz(x-y) + \frac{xz}{2}(x-z) + \frac{z^2y}{4} + \frac{z^3}{8} \geq 0. \end{aligned}$$

从而

$$f(x, y, z) \leq f\left(x + \frac{z}{2}, y + \frac{z}{2}, 0\right)$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(x+\frac{z}{2}\right)^2\left(y+\frac{z}{2}\right)=\left(x+\frac{z}{2}\right)^2\left[1-\left(x+\frac{z}{2}\right)\right] \\
 & =t^2(1-t)=4\cdot\frac{t}{2}\cdot\frac{t}{2}(1-t)\left(\text{令 } t=x+\frac{z}{2}\right) \\
 & \leq 4\left[\frac{\frac{t}{2}+\frac{t}{2}+(1-t)}{3}\right]^3=\frac{4}{27}.
 \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{t}{2}=1-t$ 即 $t=\frac{2}{3}$ 且 $z=0$ 时取等号.

即 $x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{3}, z=0$ 时, 等号成立(由对称性, $(x, y, z) = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$ 时等号也成立).

第 32 届加拿大数学奥林匹克(2000)

1 中午 12:00, Anne, Beth 和 Carmen 从同一地点沿着 300 米长的环形跑道跑步. 每人匀速地在无限的时间内以两种可能的方向奔跑. 证明: 如果 Anne 的速度不同于其他两人, 那么在以后某一时刻, Anne 与其他两人至少保持 100 米远的距离(这里“距离”是以离二者较近的弧长计算的)

【证明 1】考虑三人的相对速度, 我们可以假定 Anne 的速度为 0, Beth 的速度不小于 Carmen, Carmen 的速度为正. 如果 Beth 的速度不及 Carmen 速度的两倍, 那么当 Carmen 跑完 100 米时, 二人离 Anne 至少 100 米远; 如果 Beth 的速度超过 Carmen 速度的两倍, 那么当 Carmen 跑的路程在 100~200 米之间时, Beth 所跑的路程超过 200 米, 这一段路程中有一部分离 Anne 100 多米, 那么在这一段路程的某一时刻, Beth 和 Carmen 离 Anne 都至少 100 米远.

【证明 2】考虑三人的相对速度, 我们可以假定 Anne 的速度为 0, 其他二人的速度不为 0. 设 Beth 的速度不小于 Carmen, Beth 用了 t 秒的时间跑完 200 米. 那么无限集 $T = \{t, 2t, 4t, 8t, \dots\}$ 的各时刻, Beth 离 Anne 恰好 100 米. 在 t 时刻, Carmen 跑的路程为 d 米, 则 $0 < d \leq 200$. 设 k 是满足 $2^k d \geq 100$ 的最小整数, 那么 $k \geq 0$, 且 $100 \leq 2^k d \leq 200$. 因此, 在时刻 $2^k t \in T$ 时, Beth 和 Carmen 离 Anne 都有至少 100 米远.

2 数列 a_1, a_2, \dots, a_{100} 是整数 1901, 1902, \dots , 2000 的一个排列. 定义部分和数列

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}.$$

若数列 $\{S_i\}$ 中每一项 S_i ($1 \leq i \leq 100$) 均不被 3 整除, 则满足条件的数列 $\{a_n\}$ 有多少个?

【解】令 $\{1901, 1902, \dots, 2000\} = R_0 \cup R_1 \cup R_2$. 这里 R_i 里的任意元素模 3 同余于 i ($i = 0, 1, 2$). 则 $|R_0| = |R_1| = 33, |R_2| = 34$.

由于任一个排列 $s = (a_1, a_2, \dots, a_{100})$ 的部分和是否被 3 整除由排列 $s' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_{100})$ 的部分和所决定, 其中 a'_i 是 a_i 模 3 的余数(共有 33 个 0, 33 个 1, 34 个 2). 因为 s 的部分和仅仅依赖于其余数构成的数列 s' . 欲使 s' 中每一部分和均不能被 3 整除, 则由 s 中 67 个 1 和 2 构成的数列应为 1, 1, 2, 1, 2, \dots , 1, 2 或 2, 2, 1, 2, 1, \dots , 2, 1. 但 $|R_2| = |R_1| + 1$, 故只有第二种情形才可能. s' 中的 33 个 0 除了 $a'_i \neq 0$ 可放在其他任何地方, 这样有

$$C_{99}^{33} = \frac{99!}{33! \cdot 66!}$$

种方式. 因此, 满足条件要求的数列共有

$$C_{99}^{33} \cdot 33! \cdot 33! \cdot 34! = \frac{99! \cdot 33! \cdot 34!}{66!} \uparrow.$$

3 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2000}\}$ 是一个整数数列, 其中 $a_i \in [-1000, 1000]$. 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2000} = 1$, 求证: 存在 A 的一个非空子数列, 其和为 0.

【证明】若 $a_i = 0 (1 \leq i \leq 2000)$, 则集合 $\{a_i\}$ 即为满足条件的子集, 下设 $a_i \neq 0$.

令 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{2000}\}$ 是数列 A 的一个重排数列, 其中 b_i 取自 A , $b_1 > 0, b_2 < 0$, 且对每个 $i = 2, 3, \dots, 2000, b_i$ 的符号与 $S_{i-1} = b_1 + b_2 + \dots + b_{i-1}$ 相反 (可假定每个 $S_{i-1} \neq 0$, 否则问题得证).

我们可证这样的 B 是存在的. 事实上, 由于 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2000} = 1$, 因此, A 中每一次挑选后剩下的项之和或者为 0, 或者与 S_{i-1} 有相反的符号, 所以每一个这样的 b_i 总是存在的.

由以上定义可知, 每个 $S_1, S_2, \dots, S_{2000}$ 都属于区间 $[-999, 1000]$ 中的 1999 个非零整数中的某一个. 由抽屉原理知, 至少有两个是相等的, 设 $S_j = S_k (1 \leq j < k \leq 2000)$, 这样 $b_{j+1} + b_{j+2} + \dots + b_k = 0$. 证毕.

4 凸四边形 $ABCD$ 满足

$$\angle CBD = 2\angle ADB, \angle ABD = 2\angle CDB, AB = CB.$$

求证: $AD = CD$.

【证明 1】以 B 为圆心, 通过 A 和 C 作圆与 DB 的延长线交于 P , 则

$$\angle CPD = \frac{1}{2}\angle CBD = \angle ADB,$$

$$\angle APD = \frac{1}{2}\angle ABD = \angle CDB,$$

于是, 四边形 $APCD$ 为平行四边形.

所以 PD 平分 AC , BD 是等腰 $\triangle ABC$ 的角平分线, 于是有

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABD = \angle CDB.$$

所以 DB 是 $\angle ADC$ 的平分线, 又 DB 是 $\triangle ADC$ 的底边的中线, 所以, $\triangle ADC$ 为等腰三角形, 则 $AD = CD$.

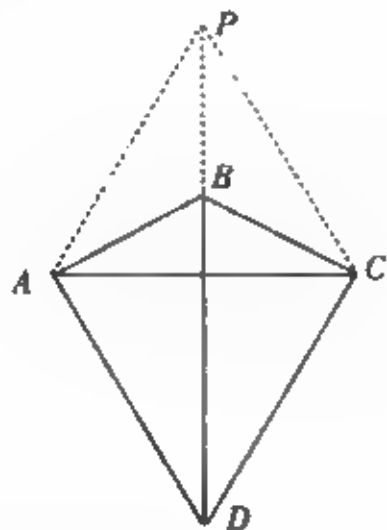
【证明 2】设 $\angle ABD$ 的平分线交 AD 于 E , $\angle CBD$ 的平分线交 CD 于 F , 则

$$\angle FBD = \angle BDE, \angle EBD = \angle BDF,$$

所以 $BE \parallel FD, BF \parallel ED$. 从而 $BEDF$ 为平行四边形, 且 BD 交 EF 于中点 M .

另一方面, 因 BE 是角平分线, 故有

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DE}, \text{同理 } \frac{CB}{BD} = \frac{CF}{DF}.$$

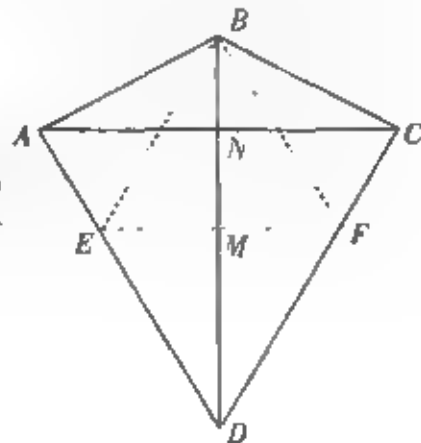


2000. 4. 1 图

由条件 $AB=CB$ 得 $\frac{AE}{DE} = \frac{CF}{DF}$, 从而 $EF \parallel AC$.

所以 $\triangle DEF \sim \triangle DAC$.

由上证知 BD 交 AC 于中点 N , 又因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 所以 $AC \perp BD$, 从而 $\triangle NAD, \triangle NCD$ 都是直角三角形, 且有一条直角边是公共的, 则 $\triangle NAD \cong \triangle NCD$, 从而 $AD=CD$.



2000.4.2 图

5 已知实数 a_1, a_2, \dots, a_{100} 满足

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{100} \geq 0,$$

$$a_1 + a_2 \leq 100,$$

$$a_3 + a_4 + \dots + a_{100} \leq 100.$$

求 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2$ 的最大值, 并求出达到最大值时的数列 a_1, a_2, \dots, a_{100} .

【解】因为 $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} \leq 200$, 所以

$$\begin{aligned} & a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 \\ & \leq (100 - a_2)^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{100}^2 \\ & = 100^2 - 200a_2 + 2a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{100}^2 \\ & \leq 100^2 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{100})a_2 + 2a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{100}^2 \\ & = 100^2 + (a_2^2 - a_1a_2) + (a_3^2 - a_3a_2) + \dots + (a_{100}^2 - a_{100}a_2) \\ & = 100^2 + (a_2 - a_1)a_2 + (a_3 - a_2)a_3 + \dots + (a_{100} - a_2)a_{100}, \end{aligned}$$

因为 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{100} \geq 0$,

所以 $(a_2 - a_1)a_2, (a_3 - a_2)a_3, \dots, (a_{100} - a_2)a_{100}$ 均非正.

所以 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 \leq 10000$, 且等号成立时当且仅当

$$a_1 = 100 - a_2, a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 200,$$

及 $(a_2 - a_1)a_2, (a_3 - a_2)a_3, (a_4 - a_2)a_4, \dots, (a_{100} - a_2)a_{100}$ 都为 0.

因为 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{100} \geq 0$, 最后一个条件成立时当且仅当 $i \geq 1$ 时, $a_1 = a_2 = \dots = a_i$, 且 $a_{i+1} = \dots = a_{100} = 0$.

若 $i=1$, 则达到最大值时的数列为 $100, 0, 0, \dots, 0$;

若 $i \geq 2$, 则由 $a_1 + a_2 = 100$, 有 $i=4$, 于是对应的数列为 $50, 50, 50, 50, 0, 0, \dots, 0$.

综上, $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2$ 的最大值是 10000, 达到最大值时的数列为 $100, 0, 0, \dots, 0$ 或 $50, 50, 50, 50, 0, 0, \dots, 0$.

第 33 届加拿大数学奥林匹克(2001)

1 给定整系数二次函数 $f(x)$, 满足以下条件:

- (1) $f(x)$ 的各系数之和为素数;
 (2) 方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的正整数解;
 (3) 存在正整数 t , 使得 $f(t)=-55$.

(I) 求证: 方程 $f(x)$ 的较小根为 2;

(II) 求方程 $f(x)=0$ 的较大根.

(I) 【证明】设方程 $f(x)=0$ 的两根分别为 R 和 J ($R>J>0$), 则

$$f(x)=a(x-R)(x-J)=ax^2-a(R+J)x+aRJ.$$

从而各项系数的和为

$$a-a(R+J)+aRJ=a(R-1)(J-1).$$

注意到 $a(R-1)(J-1)$ 是素数, 且 $R>J>0$, 则必有

$$a=1, J-1=1, R-1 \text{ 为素数.}$$

故 $a=1, J=2$, 即方程的较小根为 2.

(II) 【解】由 (I) 知, $f(x)=(x-R)(x-2)$.

注意到 $f(t)=-55=-5 \cdot 11=(t-R)(t-2)$, 且 $R>2$, 故 $t-R$ 一定是负数. 我们有
 下列四种情况:

- (a) $t-R=-55, t-2=1 \Rightarrow t=3, R=58$;
 (b) $t-R=-11, t-2=5 \Rightarrow t=7, R=18$;
 (c) $t-R=-5, t-2=11 \Rightarrow t=13, R=18$;
 (d) $t-R=-1, t-2=55 \Rightarrow t=57, R=58$.

因为 $R-1$ 是素数, 所以只有 (b), (c) 符合要求, 因此 $R=18$.

2 将 -10 到 10 填写到如下图所示的方格中, 每个方格均被染成红色或白色, 红色方格中的数字之和为 n , 莫林把一个代币放在方格 0 上, 她扔硬币 10 次, 每次扔出人头, 就把代币向右移动一格, 扔出字, 就把代币向左移动一格. 最后代币落在红色方格上的概率为有理数 $\frac{a}{b}$ (a, b 为正整数, $(a, b)=1$ [●], 且 $a+b=2001$). 求 n 的最大可能值.

-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

● 原题中无此条件, 参赛同学给出了两种不同的解答, 具体参看评注.

【解】经过 10 次扔硬币后,代币落在方格 $2k-10$ 上, k 是扔出人头次数. 由于总共有 $2^{10}=1024$ 种结果, 而扔出 k 次人头的结果是 C_{10}^k 种, 故代币最后落在方格 $2k-10$ 的概率是 $\frac{C_{10}^k}{1024}$. 从而最后落在红色方格的概率是 $\frac{c}{1024}$, 这里 c 是下列 11 个数中部分数字的和

$$\begin{aligned} & C_{10}^0, C_{10}^1, C_{10}^2, C_{10}^3, C_{10}^4, C_{10}^5, C_{10}^6, C_{10}^7, C_{10}^8, C_{10}^9, C_{10}^{10} \\ & = 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1. \end{aligned} \quad (1)$$

由题知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{1024}$, $(a, b) = 1$, $a + b = 2001$.

因为 $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$, $a + b = 2001$, 故 $1001 \leq b \leq 2001$. 又 $b \mid 1024$, 故

$$b = 1024, a = c = 2001 - 1024 = 977.$$

(1) 中数字和为 977 只有一种情况

$$977 = 10 + 10 + 45 + 120 + 120 + 210 + 210 + 252. \quad (2)$$

(这很容易得出, 因为 $1024 - 977 = 47$, 而 $47 = 45 + 1 + 1$).

要使 n 值最大, 必须按照下列方法染色:

正奇数所在方格染红色, 负奇数所在方格染白色.

又 $252 = C_{10}^5$ 在和式(2)中, 故方格 $2 \cdot 5 - 10 = 0$ 也染红色.

对 $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

若 C_{10}^k 在和式(2)中出现 2 次, 则方格 $2k-10$ 和 $10-2k$ 都染红色.

若 C_{10}^k 在和式(2)中不出现, 则方格 $2k-10$ 和 $10-2k$ 都染白色.

若 C_{10}^k 在和式(2)中只出现一次, 则方格 $10-2k$ 染红色, 方格 $2k-10$ 染白色.

从而当下列数字 $\{1, 3, 5, 7, 9, -8, 8, -4, 4, -2, 2, 0, 6\}$ 所在方格染红色时, n 有最大值 31.

【评注】若题中不假设 a, b 互素, 则还有几种可能性.

因为 a, b 的最大公约数能整除 $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, 故 $\gcd(a, b)$ 是下列数中之一: 1, 3, 23, 29, $3 \cdot 23$, $3 \cdot 29$, $23 \cdot 29$, $3 \cdot 23 \cdot 29$.

又 $\frac{a}{b} = \frac{c}{1024}$, 故用 $\gcd(a, b)$ 除 b 得到 2 的幂的形式, 从而 b 的素因式分解是下列形式之一:

$$2^k, 3 \cdot 2^k, 23 \cdot 2^k, 29 \cdot 2^k, 69 \cdot 2^k, 87 \cdot 2^k, 667 \cdot 2^k, 2001.$$

又由 $1001 \leq b \leq 2001$ 可得 b 是下列数之一:

$$1024, 3 \cdot 512 = 1536, 23 \cdot 64 = 1472, 29 \cdot 64 = 1856,$$

$$69 \cdot 16 = 1104, 87 \cdot 16 = 1392, 667 \cdot 2 = 1334, 2001.$$

从而 $\frac{a}{b} = \frac{2001-b}{b}$ 是下列分数之一:

$$\begin{array}{cccccccc} 977 & 465 & 529 & 145 & 897 & 609 & 667 & 0 \\ 1024 & 1536 & 1472 & 1856 & 1104 & 1392 & 1334 & 2001 \end{array}$$

故 $c = \frac{1024a}{b}$ 是下列数之一: 977, 310, 368, 80, 832, 448, 512, 0.

经过计算可得, 只有下列几种(1)中数字的和构成可能的 c 值.

$$977 = 10 + 10 + 45 + 120 + 120 + 210 + 210 + 252;$$

$$310 = 10 + 45 + 45 + 210;$$

$$512 = 10 + 10 + 120 + 120 + 252;$$

$$512 = 1 + 1 + 45 + 45 + 210 + 210;$$

$$0 = 0.$$

又因为和式中只出现一次的数对 n 的最大值有影响, 我们作表如下:

c	和式中只出现一次的数	对应的红色方格中数字
977	{45, 252}	{6, 0}
310	{10, 210}	{8, 2}
512	{252}	{0}
512	\emptyset	\emptyset
0	\emptyset	\emptyset

显然, 当 $c = 310 = C_{10}^2 + C_{10}^6 + C_{10}^8 + C_{10}^9$ 时, n 值最大, 此时红色方格中数字是 {1, 3, 5, 7, 9, -6, 6, 2, 8}.

故最后代币落在红色方格的概率 $\frac{a}{b} = \frac{465}{1536} - \frac{310}{1024} = \frac{155}{512}$, $n = 35$.

3 在 $\triangle ABC$ 中, $AC > AB$, P 是 BC 的垂直平分线和 $\angle A$ 的角平分线的交点, X 是 AB 延长线上的点, Y 是 AC 上的点, 并且 $PX \perp AB$, $PY \perp AC$, XY 和 BC 交于点 Z , 求 $\frac{BZ}{ZC}$ 的值.

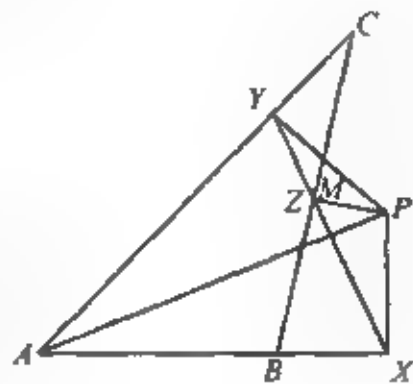
【解1】设 $\triangle ABC$ 的外心为 O , BC 的中点为 M , $\angle BAC$ 的角平分线交此圆于点 R , 则有

$$\angle BOR = 2\angle BAR = 2\angle CAR = \angle COR.$$

故 $BR = CR$, 且 R 在 BC 的垂直平分线上.

从而 $R = P$, 且 A, B, C, P 共圆.

因为 X, Y, M 分别是点 P 在 $\triangle ABC$ 的边或其延长线上的射影, 故由西姆松定理可得 X, Y, M 三点共线. 从而 $M = Z$, $\frac{BZ}{ZC}$



2001.3 图

$$= \frac{BM}{MC} = 1.$$

【解2】因为 $\angle PAX = \angle PAY$, $\angle PXA = \angle PYA = 90^\circ$, 故 $\triangle PAX \cong \triangle PAY$, 从而 $AX = AY, PX = PY$.

又 P 在 BC 的垂直平分线上, 故 $PC = PB$.

从而 $\triangle PYC \cong \triangle PXB$, 且 $CY = BX$.

注意到直线 XYZ 截 $\triangle ABC$, 由梅内劳斯定理可得

$$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XA} = -1.$$

再由 $AX = AY, CY = BX$ 可得 $\frac{BZ}{ZC} = 1$.

4 n 是正整数, 现有一矩阵, 其各元素均为正整数, 对这个矩阵可作以下两种操作:

(a) 将某一行的元素都乘以 n ;

(b) 将某一系列的元素都减去 n .

求所有可能的 n 值, 使得对给定的任何矩阵, 在经过有限次上述操作后, 其中元素全部变为 0.

【解】 n 只能为 2.

首先证明当 $n \neq 2$ 时, $T_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ n-1 \end{pmatrix}$ 不能转换为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

当 $n=1$ 时, 结论显然.

当 $n \geq 3$ 时, 对任意矩阵 $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, 令 $d(T) = b - a \pmod{n-1}$.

我们来证上面两种操作都不能改变 $d(T)$ 的值.

若把 T 中两项都减去 n , 则 $b-a$ 不变;

若把第一行乘以 n , 则 a 变为 na ,

$$b - na \equiv b - a - (n-1)a \equiv b - a \pmod{n-1}.$$

同理, 把第二行乘以 n 也不会改变 $d(T)$ 的值.

又因为 $d(T_0) = (n-1) - 1 = -1 \pmod{n-1}$, 而 $0 - 0 \not\equiv -1 \pmod{n-1}$, 故 T_0 不能转换为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

下证, 当 $n=2$ 时, 对任意矩阵, 经下述操作, 其中元素可全变为 0.

(我们的目标是先把第一列的元素全变为 0)

将第一列的元素全部减去 2, 重复这个变换, 直到这一列中至少有一个元素是 1 或 2. 然后重复以下三步:

- (1) 把第一列是 1 的行全部乘以 2;
 (2) 把第一列是 2 的行全部乘以 2(至少有一个);
 (3) 把第一列全部减去 2.

上面每一步都把第一列中大于 2 的元素变小,从而最后第一列中元素全是 1 和 2. 这时再用一次(1)和(3),可得到一列的 0,对剩余的每一列依次序重复以上步骤,由于上述变换对全部是 0 的列没有影响,故最后可得到一个元素全部是 0 的矩阵.

5 半径为 1 的圆上三点 P_0, P_1, P_2 满足 $P_1 P_2 = t < 2$, 定义 P_i 是 $\triangle P_{i-1} P_i P_{i+1}$ 的外接圆圆心($i \geq 3$).

(I) 证明 $P_1, P_5, P_9, P_{13}, \dots$ 共线;

(II) 令 $P_1 P_{1001} = x, P_{1001} P_{2001} = y$, 求使 $\sqrt[500]{\frac{x}{y}}$ 是整数的 t 值.

(I) 【证明】令 $\angle P_1 P_3 P_2 = 2\alpha$, 由 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 是等腰三角形可得 $t = P_1 P_2 = 2\sin\alpha$, 且 $P_3 P_4$ 垂直平分 $P_1 P_2$.

又由 $\triangle P_2 P_3 P_4$ 是等腰三角形可得

$$\frac{P_2 P_3}{P_3 P_4} = \frac{2}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

因为 P_5 是 $\triangle P_2 P_3 P_4$ 的外心, 所以

$$\angle P_3 P_5 P_4 = 2\angle P_3 P_2 P_4 = 2\angle P_2 P_3 P_4 = 2\alpha.$$

从而 $\triangle P_3 P_4 P_5 \sim \triangle P_1 P_2 P_3$.

又 $P_3 P_4 \perp P_1 P_2$, 故 $\angle P_1 P_3 P_5 = 90^\circ$.

由相似还可得到

$$\frac{P_3 P_5}{P_1 P_3} = \frac{P_3 P_4}{P_1 P_2} = \frac{1}{(2\sin\alpha) \cdot (2\cos\alpha)} = \frac{1}{2\sin 2\alpha} = r.$$

同理可得 $\angle P_i P_{i+2} P_{i+4} = 90^\circ$,

$$\frac{P_{i+2} P_{i+4}}{P_i P_{i+2}} = r (i \geq 3).$$

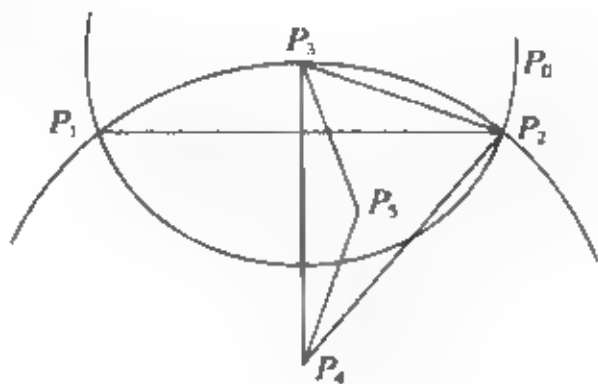
从而 $P_1, P_5, P_9, P_{13}, \dots$ 在以 4 为周期, r 为比值的对数螺线上, 于是 $P_1, P_5, P_9, P_{13}, \dots$ 共线.

(II) 【解】由对数螺线的自我相似可得

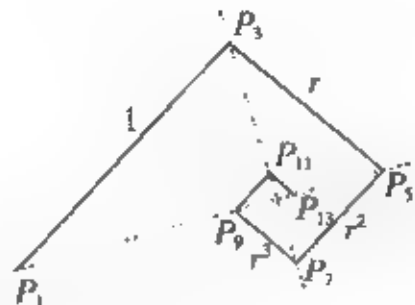
$$P_1 P_{1001} = r^{500} P_{1001} P_{2001},$$

从而

$$\sqrt[500]{\frac{x}{y}} = \frac{1}{r} = 2\sin 2\alpha.$$



2001.5.1 图



2001.5.2 图

当 $\sin 2\alpha \in \left\{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1\right\}$ 时, $\sqrt[500]{\frac{x}{y}}$ 为整数.

由于 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 故当 $\alpha \in \{15^\circ, 45^\circ, 75^\circ\}$ 时, 即 $t \in \{2\sin 15^\circ, 2\sin 45^\circ, 2\sin 75^\circ\}$ 时, $\sqrt[500]{\frac{x}{y}}$ 为整数.

第34届加拿大数学奥林匹克(2002)

1 集合 $\{1, 2, \dots, 9\}$ 的子集 S 满足其中每一个无序数对的和均不同, 例如: $\{1, 2, 3, 5\}$ 有这种性质, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 则没有, 因为 $\{1, 4\}$ 和 $\{2, 3\}$ 的和均为5. 问 S 中最多含有几个元素.

【解1】可以得出 $\{1, 2, 3, 5, 8\}$ 中的数对的和均不同.

假设 S 中含有6个元素, 由于 S 中最小的数对的和可能是 $1+2=3$, 最大的数对的和可能是 $8+9=17$, 故 S 中的数对和共有15种可能: $3, 4, \dots, 17$.

而 S 中共有 $C_6^2=15$ 对数, 故 $3, 4, \dots, 17$ 均是 S 中数对的和.

又和是3的只有 $\{1, 2\}$, 和是17的只有 $\{8, 9\}$, 故 $1, 2, 8, 9$ 都在 S 中. 而 $1+9=2+8$, 矛盾!

从而, S 中最多只能有5个元素.

【解2】可以得出 $\{1, 2, 3, 5, 8\}$ 中的数对的和均不同.

假设 S 中有6个元素 $a_1 < a_2 < \dots < a_6$.

因为 $a_1 + a_6 \neq a_2 + a_5$, 故 $a_6 - a_5 \neq a_2 - a_1$. 同理,

$$a_6 - a_5 \neq a_4 - a_3, a_4 - a_3 \neq a_2 - a_1.$$

所以, $(a_6 - a_5) + (a_4 - a_3) + (a_2 - a_1) \geq 1 + 2 + 3 = 6$. (1)

同理可得 $a_3 - a_2 \neq a_5 - a_4$, 从而

$$(a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) \geq 1 + 2 = 3. \quad (2)$$

(1)+(2), 得

$$a_6 - a_5 + a_5 - a_4 + a_4 - a_3 + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 \geq 6 + 3 = 9.$$

即 $a_6 - a_1 \geq 9$, 而 S 中的元素在1到9之间, 不可能有 $a_6 - a_1 \geq 9$, 矛盾!

从而, S 中最多只能有5个元素.

2 如果每一个不超过正整数 n 的正整数都可以写成 n 的不同因子的和, 则称 n 为“好数”. 例如6的因子有1, 2, 3, 6. 因为

$$1=1, 2=2, 3=3, 4=1+3, 5=2+3, 6=6,$$

所以说6是“好数”. 证明: 两个“好数”的乘积也是“好数”.

【证明】设 p, q 是“好数”, 对任意 $k \leq pq$, 可设

$$k = aq + b, 0 \leq a \leq p, 0 \leq b \leq q.$$

又因为 p 和 q 是“好数”, 故可令

$$a = c_1 + c_2 + \dots + c_m, b = d_1 + d_2 + \dots + d_n,$$

其中 c_i 是 p 的因子, d_i 是 q 的因子, 此时

$$\begin{aligned} k &= (c_1 + c_2 + \cdots + c_m)q + (d_1 + d_2 + \cdots + d_n) \\ &= c_1q + c_2q + \cdots + c_mq + d_1 + d_2 + \cdots + d_n. \end{aligned}$$

这里 c_iq 和 d_i 都是 pq 的因子.

又因为 $d_i < q \leq c_iq$, 故 c_iq 和 d_i 都是不同的, 从而 pq 是“好数”.

3 证明: 对任意正实数 a, b, c , 有

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c,$$

并求出取等号的条件.

【证明 1】注意到

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= \frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{b^4 + c^4}{2} + \frac{c^4 + a^4}{2} \\ &\geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\ &= \frac{a^2(b^2 + c^2)}{2} + \frac{b^2(c^2 + a^2)}{2} + \frac{c^2(a^2 + b^2)}{2} \\ &\geq a^2bc + b^2ca + c^2ab. \end{aligned}$$

两边同时除以 abc 得到

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c,$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

【证明 2】注意到若用 ka, kb, kc 分别替换 a, b, c , 依然可以得到原不等式, 故不失一般性, 假设 $abc=1$, 则

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} = abc \left(\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \right).$$

从而只需证明

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c.$$

由幂平均不等式得

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^4.$$

即

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq (a + b + c) \cdot \frac{(a + b + c)^3}{27}.$$

由均值不等式有

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1.$$

故

$$a + b + c \geq 3.$$

从而

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq (a + b + c) \cdot \frac{(a + b + c)^3}{27}$$

$$\geq (a+b+c) \cdot \frac{3^3}{27} - a + b + c,$$

、当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

4 已知 $\odot O$ 半径为 r , A, B 是 $\odot O$ 上不同的点, 且 $AB < \sqrt{3}r$, 以 B 为圆心, AB 为半径作圆交 $\odot O$ 于点 C . P 是 $\odot O$ 内一点, $\triangle ABP$ 为正三角形, CP 的延长线交 $\odot O$ 于点 Q . 证明: $PQ=r$.

【证明 1】由 $BP=BC$, 知 $\angle BPC=\angle BCP$, 记 $\angle BCP=\theta$.

注意到四边形 $QABC$ 内接于 $\odot O$, 故

$$\angle BAQ=180^\circ-\theta \Rightarrow \angle PAQ=120^\circ-\theta.$$

$$\text{又} \quad \angle APQ=180^\circ-\angle APB-\angle BPC=120^\circ-\theta.$$

$$\therefore PQ=AQ \text{ 且 } \angle AQP=2\theta-60^\circ.$$

$$\text{则} \quad \angle ABC=180^\circ-\angle AQC=240^\circ-2\theta.$$

$$\text{又} \because OA=OB=OC=r, AB=BC, \therefore \triangle OAB \cong \triangle OCB.$$

$$\therefore \angle ABO=\angle CBO=\frac{1}{2}\angle ABC=120^\circ-\theta.$$

$$\because \angle PAQ=\angle BAO=\angle APQ=\angle ABO, AP=AB,$$

$$\therefore \triangle AQP \cong \triangle AOB, \therefore QP=OB=r.$$

【证明 2】因为 A, P, C 都在以 B 为圆心的圆上, 所以

$$60^\circ=\angle ABP=2\angle ACP \Rightarrow \angle ACP=30^\circ.$$

$$\because Q, A, C \text{ 都在 } \odot O \text{ 上}, \therefore \angle QOA=2\angle QCA=60^\circ, \therefore QA=r.$$

$$\because BP=BC, \therefore \angle BPC=\angle BCP=\angle ACB+30^\circ,$$

$$\therefore \angle APQ=180^\circ-\angle APB-\angle BPC=90^\circ-\angle ACB.$$

$$\because Q, A, B, C \text{ 都在 } \odot O \text{ 上, 且 } AB=BC,$$

$$\therefore \angle AQP=\angle AQC=\angle AQB+\angle BQC=2\angle ACB.$$

$$\therefore \angle QAP=180^\circ-\angle AQP-\angle APQ=90^\circ-\angle ACB,$$

$$\therefore \angle APQ=\angle QAP, \therefore PQ=AQ=r.$$

5 已知 $N=\{0, 1, 2, \dots\}$, 求所有满足下列条件的函数 $f: N \rightarrow N$:

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2).$$

【解 1】我们可以得出 f 是常数函数. 用反证法.

假设存在 $x, y \in N$ 使得 $f(x) < f(y)$, 则有 $f(y)-f(x) > 0$. 选择 x, y , 使得 $f(y)-f(x)$ 的值是最小的, 则

$$f(x) = \frac{xf(x)+yf(x)}{x+y} < \frac{xf(y)+yf(x)}{x+y} < \frac{xf(y)+yf(y)}{x+y} = f(y).$$

即

$$f(x) < f(x^2 + y^2) < f(y).$$

从而

$$0 < f(x^2 + y^2) - f(x) < f(y) - f(x).$$

与前设最小性矛盾! 故 f 是常数函数.

又 $f(0) \in \mathbf{N}$, 所以这个常数也在 \mathbf{N} 中. 又对任意的 $c \in \mathbf{N}$, $xc + yc = (x + y)c$ 都成立, 所以 $f(x) = c, c \in \mathbf{N}$ 是满足题意的函数.

【解2】我们证明 f 是常数函数.

定义 $g(x) = f(x) - f(0)$, 则

$$g(0) = 0, g(x) \geq -f(0).$$

且

$$xg(y) + yg(x) = (x + y)g(x^2 + y^2).$$

令 $y = 0$ 得到 $g(x^2) = 0$. (特别的 $g(1) = g(4) = 0$)

令 $x = y = 1$ 得到 $g(2) = 0$.

同样, 若 $x, y, z \in \mathbf{N}$ 满足 $x^2 + y^2 = z^2$, 则有

$$g(y) = -\frac{y}{x}g(x). \quad (*)$$

令 $x = 4, y = 3$, 得到 $g(3) = 0$.

对一切偶数 $x = 2n > 4$, 令 $y = n^2 - 1$, 则 $y > x$ 且 $x^2 + y^2 = (n^2 + 1)^2$.

对一切奇数 $x = 2n + 1 > 3$, 令 $y = 2(n + 1)n$, 则 $y > x$ 且

$$x^2 + y^2 = ((n + 1)^2 + n^2)^2.$$

因此对一切 $x > 4$, 都存在 $y > x$ 满足 $(*)$ 式.

假设存在 $x > 4$, 使得 $g(x) > 0$, 则可得到一组 $x = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ 满足 $g(x_{i+1}) = -\frac{x_{i+1}}{x_i}g(x_i)$.

从而 $|g(x_{i+1})| > |g(x_i)|$ 且 $g(x_i)$ 的符号是交替的.

因为 $g(x)$ 是整数, 故 $|g(x_{i+1})| > |g(x_i)| + 1$.

从而当 i 足够大时, 有 $g(x_i) < -f(0)$. 矛盾!

由解法 1 得, 满足题意的函数为 $f(x) = c, c \in \mathbf{N}$.

第 35 届加拿大数学奥林匹克(2003)

1 在一个标准的时钟上,时针和分针连续转动.设 m 是整数,且 $1 \leq m \leq 720$. 当前是 12:00 过 m 分钟,时针和分针的夹角恰为 1° . 试确定 m 的所有可能值.

【解 1】注意到每 1 个小时,时针转过 30° 而分针转过 360° ,故分针的角速度为时针的 12 倍.

由于时钟上每两个相邻的刻度恰隔 30° ,可以设此刻时针与刻度 12 的夹角 $\alpha = 30^\circ \cdot k + \beta$, 其中 $0 \leq k \leq 11, 0 \leq \beta < 30^\circ$, 且 $k, \beta \in \mathbb{N}$. 因此有

$$30^\circ \cdot k + \beta \pm 1^\circ = 12 \cdot \beta.$$

即

$$30^\circ \cdot k \pm 1^\circ = 11\beta.$$

不难得到上述方程的满足条件的整数解 (k, β) 为 $(4, 11)$ 或 $(7, 19)$, 所以

$$m = 60k + 2\beta = 262 \text{ 或 } 458.$$

【解 2】令 $m = 60k + r$, 其中 $k = \left\lfloor \frac{m}{60} \right\rfloor, 0 \leq r \leq 59, 0 \leq k \leq 12, k \in \mathbb{N}$.

由题意,有 $\left| \frac{60k+r}{720} \times 360^\circ - \frac{r}{60} \times 360^\circ \right| = 1^\circ$.

故 $|60k - 11r| = 2$.

解得, $(k, r) = (4, 22)$ 或 $(7, 38)$. 此时, $m = 262$ 或 458 .

2 求 $2003^{2002^{2001}}$ 的最末三位数字.

【解】设 $N = 2002^{2001}$, 问题即是求 2003^N 除以 1000 所得的余数.

由于 $2003^N \equiv 3^N \pmod{1000}$, 下面先来求 1 个 n , 使得 $3^n \equiv 1 \pmod{1000}$, 这样, 将 2002^{2001} 写为 $nk + r$ 的形式, 便有:

$$2003^N = 3^{nk+r} \equiv (3^n)^k \cdot 3^r \equiv 3^r \pmod{1000}.$$

因为 $3^2 = 10 - 1$, 利用二项式展开, 有

$$\begin{aligned} 3^{2m} &= (10 - 1)^m \\ &= (-1)^m + 10m \cdot (-1)^{m-1} + 100 \cdot \frac{m(m-1)}{2} (-1)^{m-2} + \cdots + 10^m. \end{aligned}$$

可见, 除开头的三项外, 其余每一项皆为 1000 的倍数, 令 $m = 2q$, 则

$$3^{4q} \equiv 1 - 20q + 100q(2q-1) \pmod{1000} \quad (1)$$

因此, $3^{100} \equiv 1 \pmod{1000}$. 故只要确定 2002^{2001} 除以 100 所得的余数即可. 由于

$$2002^{2001} \equiv 2^{2001} \pmod{100} \equiv 4 \cdot 2^{1999} \pmod{4 \cdot 25}.$$

又 $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$, 所以

$$2^{1999} = (2^{10})^{199} \cdot 2^9 \equiv (-1)^{199} \cdot 512 \equiv -12 \equiv 13 \pmod{25},$$

$$2^{2001} \equiv 4 \cdot 13 \equiv 52 \pmod{100},$$

即 2002^{2001} 可以写成 $100k+52$ 的形式, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. 结合(1)式, 有

$$2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{52} \equiv 1 - 20 \cdot 13 + 1300 \cdot 25 \equiv 241 \pmod{1000}.$$

故所求的最末三位数字为 2, 4, 1.

3 求不定方程组:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = xyz \end{cases}$$

的所有正实数根 (x, y, z) .

【解 1】因为 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 所以

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz,$$

故

$$x + y + z \geq 3xyz.$$

又

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2 \geq 3x^2y^2z^2,$$

则

$$xyz \geq 3x^2y^2z^2 \rightarrow xyz \leq \frac{1}{3}. \quad (1)$$

又由 $xyz \cdot x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt{x^2y^2z^2}$, 可得

$$xyz \geq 27. \quad (2)$$

(1)和(2)导致矛盾. 因此, 此不定方程组无正实数根.

【解 2】若 $x, y, z \geq 1$, 则有

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z.$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时, 等号成立.

但此时不满足第二个方程, 故 x, y, z 中至少有一个小于 1, 不妨设 $x < 1$, 则

$$x^2 + y^2 + z^2 > y^2 + z^2 \geq 2yz > yz > xyz,$$

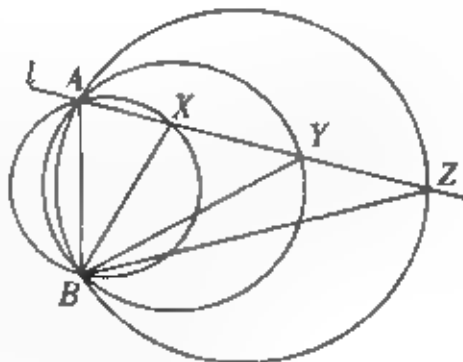
矛盾! 这表明此不定方程组无正实数根.

【解 3】不妨设 $x \geq y \geq z > 0$, 则

$$xyz = x^2 + y^2 + z^2 > x^2 + y^2 \geq 2xy,$$

从而 $z > 2$, 则有 $x^3 + y^3 + z^3 > x + y + z$. 从而方程组无正实数解.

4 给定三圆有公共弦 AB , X 是最小圆周上不同于 A 和 B 的一个动点. 直线 AX 与另两圆分别交于 Y 和 Z (Y 在 X 和 Z 之间). 求证: 比值 $\frac{XY}{YZ}$ 不随动点 X 的位置而改变.



2003. 4. 1 图

【证明 1】如图所示, 设 l 是不同于 AB 且过 A 的直线, l 与三个圆分别交于点 X, Y, Z .

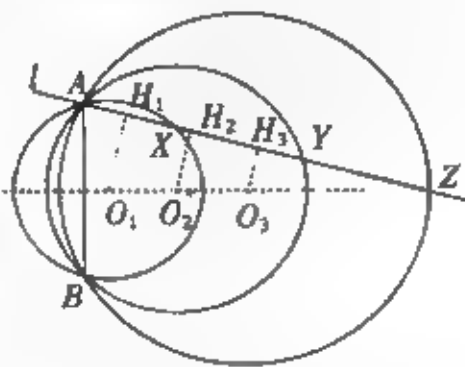
显然, $\angle AXB, \angle AYB, \angle AZB$ 与 l 的选择无关.

因此,不论 l 如何选择,相应的三角形 BXY 与 BXZ 的各内角的大小都不改变. 所以当 X 取不同的位置时,得到的 $\triangle BXY$ 和 $\triangle BXZ$ 均相似,所以比值 $\frac{XY}{YZ}$ 保持不变.

【证明 2】记三圆圆心分别为 O_1, O_2, O_3 , 注意到 AB 为三圆公共弦, 则 O_1, O_2, O_3 共线, 分别过 O_1, O_2, O_3 作 l 的垂线交 l 于点 H_1, H_2, H_3 , 易知

$$AX = 2AH_1, AY = 2AH_2, AZ = 2AH_3.$$

从而, $\frac{XY}{YZ} = \frac{H_1H_2}{H_2H_3} = \frac{O_1O_2}{O_2O_3}$ 为定值.



2003.4.2 图

5 S 是平面上 n 个不同的点组成的点集. S 中任意两点距离的最小值为 1. 证明: 存在一个 S 的由至少 $\frac{n}{7}$ 个点组成的子集 T , T 中任意两点至少相距 $\sqrt{3}$.

【解】我们采用如下的方式构造 T :

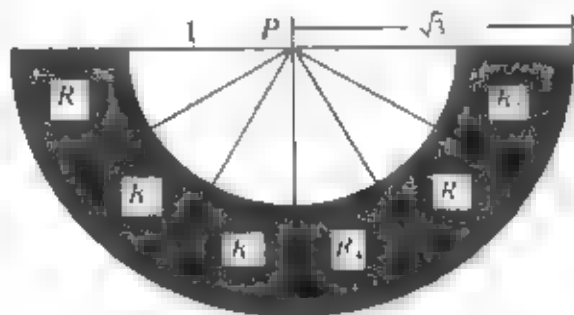
假设 S 中的点在 xy 平面内, 且点 P 是纵坐标最大的那个点, 把 P 归入 T .

现在去掉 P 和那些 S 中所有与点 P 的距离 $< \sqrt{3}$ 的点.

在剩下的那些点中, 再取出纵坐标最大的点, 将其归入 T , 并去掉 S 中所有与此点相距 $< \sqrt{3}$ 的点. 以此类推, 直到取尽 S 中所有的点.

显然, 所有归入 T 的点, 两两之间的距离 $\geq \sqrt{3}$.

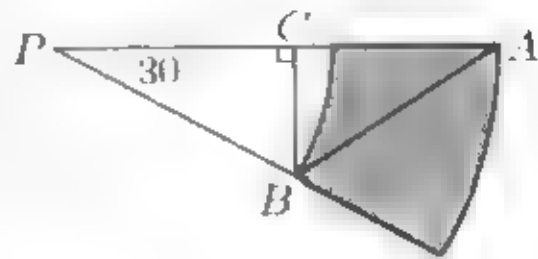
为了证明 $|T| \geq \frac{n}{7}$, 只需证明上述过程中的每



2003.5.1 图

步, 去掉的点的个数不会超过 6 个.

注意到在每一步中, 我们取了一个纵坐标最大的点 P , 所以所有与 P 相距 $< \sqrt{3}$ 的点都在以 P 为圆心, $\sqrt{3}$ 为半径的半圆内 (见图 1), 而 S 中任意两点距离 ≥ 1 , 所以它们又都在以 P 为圆心, 1 为半径的半圆外. 故这些去掉的点都落在阴影部分中. (不包括虚线边界)



2003.5.2 图

在将阴影部分分为如图 2 所示相同的 6 份. 如果去掉的点多于 6 个, 由抽屉原理, 至少有 2 个点落在同一区域内, 不妨设为 R_1 , 如图 2, 但区域 R_1 中任两点距离的最大值为 $AB = 1$. 故落在 R_1 内的那两点间距 < 1 , 矛盾!

第 36 届加拿大数学奥林匹克(2004)

1 求所有满足方程组

$$\begin{cases} xy = z - x - y, & \text{①} \\ xz = y - x - z, & \text{②} \\ yz = x - y - z & \text{③} \end{cases}$$

的三元实数组 (x, y, z) .

【解 1】前两个方程相减, 得

$$xy - xz - 2z - 2y \Rightarrow (x+2)(y-z) = 0.$$

故 $x = -2$ 或 $y = z$.

若 $x = -2$, 代入①得 $y+z = -2$, 从而③即为 $yz = (-2) - (-2) - 0$, 故 $y = 0$ 或 $z = 0$, 得到方程组的解为

$$(x, y, z) = (-2, 0, -2), (-2, -2, 0).$$

若 $y = z$, 代入①, 得 $x(y+1) = 0$, 即 $x = 0$ 或 $y+1 = 0$.

若 $x = 0, y = z$, 则由③得 $y^2 = -2y$, 从而 $y = 0$ 或 $y = -2$. 则

$$(x, y, z) = (0, 0, 0), (0, -2, -2).$$

若 $y+1 = 0, y = z$, 由③得 $x = -1$, 则 $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$.

综上, 所求方程组的解为 $(-1, -1, -1), (0, 0, 0), (0, -2, -2), (-2, 0, -2), (-2, -2, 0)$.

【解 2】原方程组可化为
$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = z+1 \\ (x+1)(z+1) = y+1, \\ (y+1)(z+1) = x+1. \end{cases}$$

令 $m = x+1, n = y+1, t = z+1$, 则可得

$$\begin{cases} mn = t, & (1) \\ mt = n, & (2) \\ nt = m & (3) \end{cases}$$

若 m, n, t 有一个为 0, 则其余两个也必为 0, 从而 $(0, 0, 0)$ 为新方程组的一组解.

设 m, n, t 是非 0 实数, 将(1)代入(2)、(3)得

$$\begin{cases} m \cdot mn = n, \\ n \cdot mn = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 1, \\ n = \pm 1. \end{cases}$$

则得到新方程的解: $(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$, 故原方程组的解为 $(-1, -1, -1), (0, 0, 0), (0, -2, -2), (-2, 0, -2), (-2, -2, 0)$.

2 将 8 个车放到如图的 9×9 棋盘上,使得这 8 个车互不攻击且所在小方格颜色相同,问共有多少种不同的方法.

(两车互不攻击是指这两个车不同在任何一行或任何一列)

【解 1】如图,首先计算所有车都在黑格的放法数.

将棋盘中的黑格分为两类,一类是奇数行,一类是偶数行,分别用 O 和 E 标记,容易知道奇数行的车和偶数行的车互不攻击,则将 5 个车放入奇数行有 $5!$ 种放法,将 4 个车放入偶数行有 $4!$ 种放法,将 9 个车放入棋盘有 $5! \cdot 4!$ 种放法,而现在要放 8 个车,则所有放法种数为

$$C_9^5 \cdot 5! \cdot 4! = 9 \cdot 5! \cdot 4!.$$

同理,将白格做同样的划分,可知,在奇数行中,可以放入 4 个互不攻击的车,放法为 $A_5^4 = 5!$ 种,在偶数行中也只能放下 4 个互不攻击的车,放法为 $A_5^4 = 5!$ 种,故在白格中的放法数为 $5! \cdot 5!$ 种.

综上,总的放法种数为

$$\begin{aligned} & 9 \cdot 5! \cdot 4! + 5! \cdot 5! \\ &= 14 \cdot 5! \cdot 4! = 40320 \text{ 种.} \end{aligned}$$

【解 2】首先考虑车在黑格中的情形,注意到 8 个车放到 9 行中,恰有一行没有车,分两种情况:

(a) 不含车的行为奇数行,此时先在 5 个奇数行中选一行不放车,然后将 8 个车依次放入奇数行和偶数行,放法总数为:

$$5 \cdot A_5^4 \cdot A_4^4 = (5!)^2;$$

(b) 不含车的行为偶数行,此时先在 4 个偶数行中选一行不放车,然后将 8 个车依次放入奇数行和偶数行,放法总数为:

$$4 \cdot A_5^4 \cdot A_4^4 = 4(5! \cdot 4!).$$

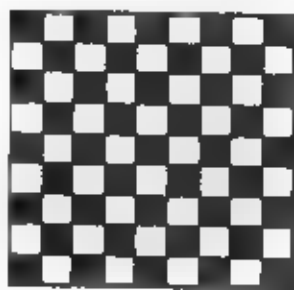
类似的处理车在白格中的情形,注意到 5 个奇数行中每行白格仅有 4 个,则所去掉的行只能是白行,此时放法数为:

$$5 \cdot A_5^4 \cdot A_4^4 = (5!)^2.$$

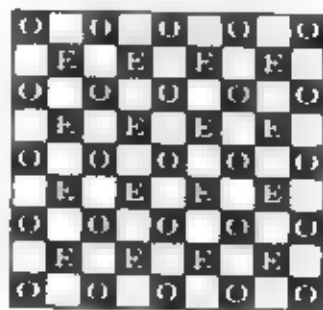
综上,放法总数为 $(5!)^2 + 4(5! \cdot 4!) + (5!)^2 = 40320$ 种.

3 已知, A, B, C, D 是圆上顺次四点,且 $AB < AD, BC > CD, \angle BAD$ 的平分线交圆于 $X, \angle BCD$ 的平分线交圆于 Y ,在由这六个点构成的六边形中,如果有四条边的长度相等,那么 BD 必为圆的直径.

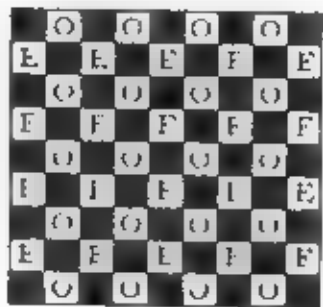
【证明 1】因为 CY 平分 $\angle BCD$,所以 $\widehat{BY} = \widehat{YC}$,又 $AB < AD$,故 Y 在 A, D 两点之间且



2004. 2 题图



2004. 2. 1 图

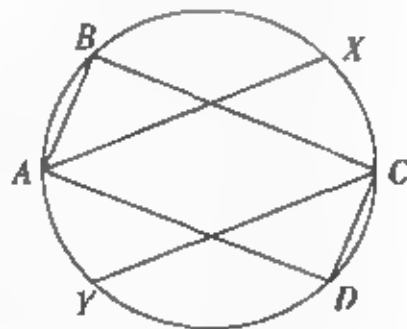


2004. 2. 2 图

$DY > YA, DY > AB$. 同理, X 在 B, C 两点之间且 $BX > XC$, $BX > CD$, 这样, 六边形的相等四边就只能是

$$YA = AB = XC = CD.$$

记 $\angle BAX = \angle DAX = \alpha, \angle BCY = \angle DCY = \gamma$, 由题意, $2\alpha + 2\gamma = 180^\circ$, 故 $\alpha + \gamma = 90^\circ$. 又 $YA = AB = XC = CD$, 则 $\widehat{BY} = \widehat{XD}$, $\alpha = \gamma$, 所以 $\alpha = \gamma = 45^\circ$, 故 $\angle BAD = 2\alpha = 90^\circ$, 则 BD 为圆的直径.



2004.3 图

【证明 2】因为 CY 平分 $\angle BCD$, 所以 $\widehat{BY} = \widehat{YC}$, 又 $AB < AD$, 故 Y 在 A, D 两点之间且 $DY > YA, DY > AB$. 同理, X 在 B, C 两点之间且 $BX > XC, BX > CD$, 这样, 六边形的相等四边就只能是

$$YA = AB = XC = CD.$$

从而 $\widehat{YA} = \widehat{AB} = \widehat{XC} = \widehat{CD}$, 则 $\widehat{BY} = \widehat{XD} \Rightarrow BY = XD$.

又 $BX = XD, DY = BY$, 则 $BY = YD = DX = XB$, 再注意到 $BYDX$ 内接于圆, 可知 $BYDX$ 为正方形, 故 BD 为圆的直径.

4 已知 p 是奇素数, 证明:

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} = \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}.$$

【证明】由 $p-1$ 为偶数, 可得

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (k^{2p-1} + (p-k)^{2p-1}).$$

$$\begin{aligned} k^{2p-1} + (p-k)^{2p-1} &= k^{2p-1} + p^{2p-1} + C_{2p-1}^1 p^{2p-2}(-k) + \cdots \\ &\quad + C_{2p-1}^{2p-2} p(-k)^{2p-2} + (-k)^{2p-1} \\ &= p^{2p-1} + C_{2p-1}^1 p^{2p-2}(-k) + \cdots + C_{2p-1}^{2p-3} p^2(-k)^{2p-3} + C_{2p-1}^{2p-2} p(-k)^{2p-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } k^{2p-1} + (p-k)^{2p-1} &\equiv C_{2p-1}^{2p-2} p(-k)^{2p-2} \\ &\equiv (2p-1)p \cdot k^{2p-2} \pmod{p^2} \end{aligned}$$

由费马小定理知

$$k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad (1 \leq k < p),$$

$$\text{则 } (2p-1)k^{2p-2} \equiv (2p-1) \cdot 1^2 = -1 \pmod{p},$$

故存在整数 m , 使得 $(2p-1)k^{2p-2} = mp - 1$, 则

$$(2p-1)pk^{2p-2} = mp^2 - p \equiv -p \pmod{p^2}.$$

所以,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} &= \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (-p) = \frac{p-1}{2} \cdot (-p) \\ &\equiv \frac{p-p^2}{2} + p^2 = \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

5 设 T 是由 2004^{100} 的所有正约数组成的集合, 集合 S 满足:

(1) S 是 T 的子集;

(2) S 中任何一个元素都不是 S 中另一个元素的倍数.

求 S 中元素个数的最大值.

【证明】因为 $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, 则

$$T = \{2^a 3^b 167^c \mid 0 \leq a \leq 200, 0 \leq b, c \leq 100, a, b, c \in \mathbf{N}\}.$$

设 $S = \{2^{200-b-c} 3^b 167^c \mid 0 \leq b, c \leq 100, b, c \in \mathbf{N}\}$, 对于任何 $0 \leq b, c \leq 100$, 都有 $200-b-c \leq 200$, 则 S 为 T 的一个子集, S 中共有 $101 \times 101 = 101^2$ 个不同的元素.

以下证明上述 S 满足条件(2), 而且没有其他适合条件的集合比 S 有更多的元素.

假设集合 S 中 $2^{200-b-c} 3^b 167^c$ 是 $2^{200-j-k} 3^j 167^k$ 的倍数, 则

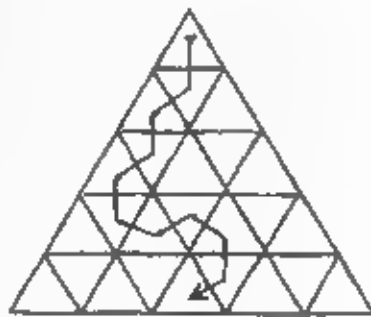
$$200-b-c \geq 200-j-k, b \geq j, c \geq k,$$

由前一个不等式得 $b+c \leq j+k$, 由后两个不等式得 $b+c \geq j+k$, 则 $b=j$ 且 $c=k$, 因此 S 中没有有一个元素是另一个元素的倍数.

假设 U 是 T 的一个子集且 U 中的元素超过 101^2 个, 因为数组 (b, c) 只有 101^2 种取值, 那么 U 中一定含有两个元素 $u_1 = 2^{a_1} 3^{b_1} 167^{c_1}$ 和 $u_2 = 2^{a_2} 3^{b_2} 167^{c_2}$, 且 $b_1 = b_2, c_1 = c_2$ 但 $a_1 \neq a_2$, 若 $a_1 > a_2$ 则 u_1 是 u_2 的倍数, 若 $a_1 < a_2$ 则 u_2 是 u_1 的倍数, 这意味着 U 不满足题设条件. 因此, T 中元素最多有 $101^2 = 10201$ 个.

第 37 届加拿大数学奥林匹克(2005)

1 将边长为 n 的正三角形每条边 n 等分, 得到若干个单位正三角形. 令 $f(n)$ 表示第一层的小三角形到最底层正中的小三角形的不同路径数. 每次移动, 只能从一个单位三角形走到另一个与它有公共边, 且与其在同一行或在其所在行下面一行的单位三角形中. 同时, 不能经过同一个小三角形 2 次或 2 次以上. 图中给出了 $n=5$ 时的一条路径. 试确定 $f(2005)$ 的值.



2005.1 题图

【解】我们来证明 $f(n) = (n-1)!$.

将水平的直线自上而下地记为 l_1, l_2, \dots, l_n .

因为路径是从顶层到底层且不会自“下”而“上”, 所以该路径必然恰通过 l_1, l_2, \dots, l_{n-1} 各一次, 对于所有 k, l_k 均被斜向的直线分成了 k 段线段, 并且路径必从这 k 段中的一段通过. 一条路径可由所通过的 $n-1$ 条线段 (指 $n-1$ 条水平直线被穿过的 $n-1$ 段) 构成的集合完全确定下来, 当路径由第 k 行向第 $k+1$ 行延伸时, 共有 k 段可能的线段使路径通过 l_k , 从而有

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!$$

种方法使得路径通过这 $n-1$ 条水平线并且每种方法对应一条路径, 所以 $f(n) = (n-1)!$. 特别地, $f(2005) = 2004!$.

2 正整数组 (a, b, c) 满足 $a^2 + b^2 = c^2$. 证明:

(I) $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 > 8$,

(II) 不存在整数 n , 使得存在 (a, b, c) 满足 $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 = n$.

(I) 【证明 1】根据条件和均值不等式, 得

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 &= c^2 \left(\frac{a+b}{ab}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2)(a+b)^2}{a^2b^2} \\ &\geq \frac{2\sqrt{a^2b^2}(2\sqrt{ab})^2}{a^2b^2} = 8. \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a=b$, 这要求 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}c$, 矛盾! 故 $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 > 8$.

【证明 2】因为 $a^2 + b^2 = c^2$, 所以 $a \neq b$ (否则, $c = \sqrt{2}a$, 矛盾). 故

$$a+b < \sqrt{2(a^2+b^2)} = \sqrt{2}c,$$

即

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) < \sqrt{2}.$$

由柯西不等式,有

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right) \geq 4,$$

则 $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right) > 2\sqrt{2}$, 故 $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 > 8$.

(II)【证明】因为 $\frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ 是有理数, 所以, 当且仅当 $\frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ 是整数时 $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2$ 是整数.

假设 $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = m$, 不妨设 $(a, b) = 1$ (否则, 同除以 a, b, c 的公约数, 而 m 值不变), 因为 $c(a+b) = mab$ 且 $(a, a+b) = 1$, 所以 $a | c$, 设 $c = ak (k \in \mathbb{N}^+)$, 于是 $a^2 + b^2 = a^2 k^2$, 则 $b^2 = (k^2 - 1)a^2$, 从而 $a | b$, 这与 $(a, b) = 1$ 矛盾, 故 $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)^2$ 不等于任何整数 n .

3 设 S 是一个由圆内的 $n (n \geq 3)$ 点组成的集合, 求证:

(I) 总可以找到 S 中的三个不同的点 a, b, c , 使得存在对应的圆周上的三个点 A, B, C , 满足 a, b, c 分别是 S 中离 A, B, C 最近的点;

(II) 无论 n 为何值, 都无法保证找到 S 中的四个点满足 (I) 中的条件.

(I)【证明】若 S 中所有点共线, 则取 a, b 为 S 所在线段的两端点, 取射线 ba 与圆的交为 A , 取射线 ab 与圆的交点为 B , 任取 S 中不同于 a, b 的一点 c , 过 c 作直线 ab 的垂线交圆于两点, 取其中任意一个作为 C , 易知此时 $(a, A), (b, B), (c, C)$ 满足题设要求.

若 S 中的点不全共线, 此时 S 的凸包必为一凸多边形, 过此多边形的任意顶点 $a (a \in S)$ 易见) 可作直线 k 使得 S 中的点都在 k 的一侧 (除了 a 在 k 上), 过 a 向另一侧作 k 的垂线, 交圆周于 A , 则 (a, A) 满足题中要求的性质. 而从上述凸多边形上至少有 3 个顶点, 从其中取不同于 a 的两点 b, c , 类似可得 B, C 两点即可.

(II)【证明】对于一般的 $n \geq 4$, 不妨设圆的半径为 1, 我们将圆周 6 等分, 取 A, B, C 为构成等边三角形的三个分点, A', B', C' 为相对的另三个分点, 以及在半径 OA' 上截取 a 使 $B'a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 同样作点 b, c , 令 $a, b, c \in S$, 在 O 为圆心, 半径为 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的圆内任取 S 的其他 $n-3$ 个点, 容易证明: $(a, A), (b, B), (c, C)$ 满足要求的性质, 且对任意 $d \in S \setminus \{a, b, c\}$ 都无法找到相应的 D 满足要求的性质.

4 记 $\triangle ABC$ 的周长、面积和外接圆半径分别为 P, K, R , 试求 $\frac{KP}{R^3}$ 的最大值.

【解 1】设三角形三边长为 a, b, c , 对应的内角为 A, B, C , 则

$$\frac{PK}{R^3} = \frac{(a+b+c) \cdot \frac{1}{2}ab\sin C}{\left(\frac{c}{2\sin C}\right)^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4(a+b+c)ab\sin^4 C}{c^3} \\
&= \frac{4(a+b+c)ab(1-\cos^2 C)^2}{c^3} \\
&= \frac{4(a+b+c)ab\left(\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2-1\right)^2}{c^3} \\
&= \frac{(a+b+c)^3(a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2}{4a^3b^3c^3},
\end{aligned}$$

不妨设 $a+b+c=1$, 于是问题变为:

求 $\lambda = \frac{(1-2c)^2(1-2b)^2(1-2a)^2}{4a^3b^3c^3}$ 在条件 $a+b+c=1, 0 < a, b, c < \frac{1}{2}$ 下的最大值.

记 $t_a = 1-2a, t_b = 1-2b, t_c = 1-2c$, 则问题转化为:

求 $\frac{1}{\lambda} = \frac{(1-t_c)^2(1-t_b)^2(1-t_a)^2}{128t_a^2t_b^2t_c^2}$ 在条件 $t_a+t_b+t_c=1, t_a, t_b, t_c > 0$ 下的最小值.

$$\begin{aligned}
\text{而 } \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{128} \left(\frac{1-(t_a+t_b+t_c) + (t_at_b+t_bt_c+t_ct_a) - t_at_bt_c}{\sqrt{(t_at_bt_c)^2}} \right)^3 \\
&= \frac{1}{128} \left(\frac{(t_at_b+t_bt_c+t_ct_a) - \sqrt{t_at_bt_c}}{\sqrt{(t_at_bt_c)^2}} \right)^3 \\
&\geq \frac{1}{128} \left(3 - \frac{1}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}.
\end{aligned}$$

综上, 当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时, 所求比值达到最大, 为 $\frac{27}{4}$.

【解2】因为

$$K = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

$$P = a+b+c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C),$$

故

$$\begin{aligned}
\frac{KP}{R^3} &= 4\sin A \sin B \sin C (\sin A + \sin B + \sin C) \\
&\leq 12 \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \right)^4.
\end{aligned}$$

因为, $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 内为凸函数, 所以

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin \frac{A+B+C}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故

$$\frac{KP}{R^3} \leq 12 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 = \frac{27}{4}.$$

5 若三元正整数组 (a, b, c) 满足

$$a \leq b \leq c, (a, b, c) = 1 \text{ 且 } (a+b+c), (a^2+b^2+c^2),$$

则称 (a, b, c) 为“ n 幂次”的. 例如: $(1, 2, 2)$ 是“5-幂次”的.

(I) 求所有的三元组, 使得对所有 $n \geq 1$, 该数组是“ n 幂次”的.

(II) 求所有的二元组, 使之是“2004 幂次”的和“2005-幂次”的但不是“2007 幂次”的.

(I) 【解】设 (a, b, c) 满足条件, 则由

$$(a+b+c) \mid (a^2+b^2+c^2)$$

得

$$(a+b+c) \mid (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2),$$

于是

$$(a+b+c) \mid 2(ab+bc+ca). \quad (1)$$

由 $(a+b+c) \mid (a^3+b^3+c^3)$, 得

$$(a+b+c) \mid (a^3+b^3+c^3) - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca),$$

于是

$$(a+b+c) \mid 3abc. \quad (2)$$

对于任意素因子 $p \geq 5$, 若 $p \mid (a+b+c)$, 则 $p \mid abc$.

不妨设 $p \mid a$, 则 $b+c \equiv 0 \pmod{p}$. 又由(1)式可得 $bc \equiv 0 \pmod{p}$, 于是 $b \equiv c \equiv 0 \pmod{p}$, 这与 $(a, b, c) = 1$ 矛盾! 故 $a+b+c$ 无大于 3 的素因子.

对于因子 2, 若 $2 \mid (a+b+c)$, 则由 $(a, b, c) = 1$ 可知 a, b, c 的奇偶性为两奇一偶, 此时 $2(ab+bc+ca) \equiv 2 \pmod{4}$, 所以由(1)式知, $(a+b+c)$ 至多含 2 的一次因子;

对于因子 3, 若 $3 \mid (a+b+c)$, 与上面相同的推理可得 $3 \mid abc$, 故由(2)式知, $(a+b+c)$ 至多含 3 的一次因子.

综上所述, 我们有 $(a+b+c) \mid 6$, 由 a, b, c 为正整数, 容易求得符合条件的数组为 $(1, 1, 1), (1, 1, 4)$.

(II) 【解】记 $T_n = a^n + b^n + c^n$, 注意到多项式

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc,$$

则

$$f(a) = a^3 - (a+b+c)a^2 + (ab+bc+ca)a - abc = 0,$$

从而

$$a^3 = (a+b+c)a^2 - (ab+bc+ca)a + abc,$$

两边同乘以 a^{n-3} , 得

$$a^n = (a+b+c)a^{n-1} - (ab+bc+ca)a^{n-2} + (abc)a^{n-3},$$

对 b, c 有类似的结论, 将三者相加, 得

$$T_n = (a+b+c)T_{n-1} - (ab+bc+ca)T_{n-2} + abcT_{n-3},$$

故若有 $(a+b+c) \mid T_{n-3}$, 且 $(a+b+c) \mid T_{n-2}$, 则必有 $(a+b+c) \mid T_n$. 由此, 取 $n = 2007$, 知不存在符合条件的正整数组.

第38届加拿大数学奥林匹克(2006)

1 设 $f(n, k)$ 为把 k 块糖分给 n 个小孩, 且使每个小孩至多分得 2 块糖的分法数目. 例如, 当 $n=3$ 时, $f(3, 7)=0$, $f(3, 6)=1$, $f(3, 4)=6$. 求 $f(2006, 1)+f(2006, 4)+f(2006, 7)+\cdots+f(2006, 1000)+f(2006, 1003)$ 的值.

【解1】把 k 块糖分给 2006 个小孩的分法数, 等于给某个选定的小孩分 0 块糖, 其余 k 块糖给其他孩子的分法, 加上给这个小孩 1 块糖, 其余 $k-1$ 块糖分给其他人的分法, 再加上给这个小孩 2 块糖, 其余 $k-2$ 块糖分给其他人的分法的和. 因此

$$f(2006, k) = f(2005, k) + f(2005, k-1) + f(2005, k-2),$$

$$\text{故所求分法总数为 } 1 + \sum_{k=1}^{1003} f(2005, k).$$

为计算 $f(n, k)$, 设有 r 个小孩分得 2 块糖, 这 r 个小孩有 C_n^r 种选法. 剩余 $k-2r$ 块糖给剩余 $n-r$ 个小孩每人至多一块. 因此

$$f(n, k) = \sum_{r=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_n^r C_{n-r}^{k-2r} = \sum_{r=0}^{\infty} C_n^r C_{n-r}^{k-2r}.$$

上式中, 当 $x < y < 0$ 时, $C_x^y = 0$.

$$\text{故本题答案为 } \sum_{k=1}^{1003} \sum_{r=0}^{\infty} C_{2005}^r C_{2005-r}^{k-2r} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{2005}^r \sum_{k=1}^{1003} C_{2005-r}^{k-2r}.$$

【解2】所求分法数等于 $(1+x+x^2)^{2005}$ 的展开式中次数不超过 1003 的项的系数之和, 也等于下面展开式中 x^{1003} 项的系数:

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2)^{2005} (1+x+\cdots+x^{1003}) \\ &= \left[(1-x^3)^{2005} (1-x)^{-2005} \right] (1-x^{1004}) (1-x)^{-1} \\ &= (1-x^3)^{2005} (1-x)^{-2006} - (1-x^3)^{2005} (1-x)^{-2006} x^{1004}. \end{aligned}$$

因为上式右边第二项的展开式中每一项次数都超过 1003, 我们在第一项的展开式中求 x^{1003} 的系数:

$$\begin{aligned} & (1-x^3)^{2005} (1-x)^{-2006} \\ &= \sum_{i=0}^{2005} (-1)^i C_{2005}^i x^{3i} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j C_{2006}^j x^{-j} \\ &= \sum_{i=0}^{2005} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} C_{2005}^i C_{2006}^j x^{3i-j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{2005} (-1)^{i-1} C_{2005}^i C_{2005+k-3i}^{2005} \right) x^k. \end{aligned}$$

故所求数目是

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{334} (-1)^i C_{2005}^{334-i} C_{3008}^{2005-3i} \\ &= \sum_{i=0}^{334} (-1)^i \frac{(3008-3i)!}{i! (2005-i)! (1003-3i)!}. \end{aligned}$$

当 $i \geq 335$ 时, $C_{3008-3i}^{2005-3i} = 0$.

2 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 矩形 $DEFG$ 内接于 $\triangle ABC$, 使得 D 在 AB 上, E 在 AC 上, F 和 G 在 BC 上. 试求所有可能的矩形 $DEFG$ 的对角线交点的轨迹.

【解】设 M 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点, K 为高 AH 的中点, 则所求轨迹为线段 MK .

注意到 D 在 AB 上, E 在 AC 上, 线段 DE 确定一个内接矩形, 线段 DE 的中点 I 在中线 AM 上, 从 I 向 BC 边所作垂线段的中点 O 恰为矩形的中心, 易知 O 在 $\text{Rt}\triangle AMH$ 的中线 MK 上.

反之, 线段 MK 上任意一点 P , 必为一边在 BC 上、宽为 K 到 BC 距离的 2 倍的一个矩形的中心.

3 在一个 m 行 n 列非负实数阵中, 每行、每列中都至少有一个正数. 若某一行与某一列相交于一个正数, 则该行的各数之和与该列的各数之和相等. 求证: $m = n$.

【证明】记矩阵中第 i 行第 j 列元素为 a_{ij} , 设 $S = \{(i, j); a_{ij} > 0\}$. 记第 i 行元素之和为 r_i , 第 j 列元素之和为 c_j , 则当 $(i, j) \in S$ 时, 有 $r_i = c_j$. 那么

$$\sum \left\{ \frac{a_{ij}}{r_i}; (i, j) \in S \right\} = \sum \left\{ \frac{a_{ij}}{c_j}; (i, j) \in S \right\}.$$

我们分别从两边计算其和:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in S} \frac{a_{ij}}{r_i} &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ \exists j \leq n}} \frac{a_{ij}}{r_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{r_i} \right) r_i = \sum_{i=1}^m 1 = m, \\ \sum_{(i,j) \in S} \frac{a_{ij}}{c_j} &= \sum_{\substack{\exists i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{a_{ij}}{c_j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{c_j} \sum_{i=1}^m a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{c_j} \right) c_j = \sum_{j=1}^n 1 = n. \end{aligned}$$

故 $m = n$.

4 一次循环赛中有 $2n+1$ 支参赛队, 其中每队与其他队都只打一场比赛, 且比赛结果中没有平局. 若三个队 X, Y, Z 满足: X 击败 Y, Y 击败 Z, Z 击败 X , 则称它们形成一个环形三元组.

(1) 求环形三元组的最小可能数目;

(2) 求环形三元组的最大可能数目.

【解 1】(1) 最小值为 0, 如果在比赛中两支队 T_i 与 T_j , 当且仅当 $i > j$ 时, 有 T_i 击败

T_i , 此时环形三元组数最小.

(2) 任何三个队要么组成一个环形三元组, 要么组成一个“支配型”三元组(某队击败了其余两队). 设前者有 c 组, 后者有 d 组, 则 $c+d = C_{2n+1}^3$. 假设某队 T_i 击败 x_i 个其他队, 则获胜组必在 $C_{x_i}^2$ 个支配型三元组中. 注意到所有的比赛场次为 $\sum_{i=1}^{2n+1} x_i = C_{2n+1}^2$, 因此

$$d = \sum_{i=1}^{2n+1} C_{x_i}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2 = \frac{1}{2} C_{2n+1}^2,$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$(2n+1) \sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{2n+1} x_i \right)^2 = n^2 (2n+1)^2,$$

因此,

$$\begin{aligned} c &= C_{2n+1}^3 - \sum_{i=1}^{2n+1} C_{x_i}^2 \\ &\leq C_{2n+1}^3 - \frac{n^2(2n+1)}{2} + \frac{1}{2} C_{2n+1}^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

以下说明上式等号能够取到.

设参赛队 $T_i = T_{i-2n-1}$ ($i > 2n+1$), 对每一个 i , 设 T_i 队击败 $T_1, \dots, T_{i-2}, \dots, T_{i+n}$, 且输给 $T_{i+n+1}, T_{i+n+2}, \dots, T_{i+2n}$. 我们需要检验这是一个能取到等号的胜、负结果.

考虑含有 T_i 的环形三元组, 若环形三元组中含有 T_j ($1 \leq j \leq n$), 则第三个队可为 T_{i+n+1} 到 T_{i+n+j} , 共 j 种取法.

即对每一个 i , 共有 $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ 个环形三元组. 当我们安排完所有 i 之后, 每一个环形三元组被计算了三次, 因此环形三元组的数目为

$$\frac{2n+1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

综上, 环形三元组最多可能有 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 个.

【解2】设 t 为环形三元组的个数, u 为满足 X 击败 Y , Y 击败 Z 的有序三元组 (X, Y, Z) 的个数. 每一个环形三元组产生 3 个有序三元组, 而其他三元组只产生 1 个符合条件的有序三元组.

而三元组的总数为 $C_{2n+1}^3 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, 故非环形三元组的个数为 $\frac{n(4n^2-1)}{3} - t$,

因此,

$$u = \frac{n(4n^2-1)}{3} - t + 3t = \frac{n(4n^2-1)}{3} + 2t.$$

从而,

$$t = \frac{3u - n(4n^2 - 1)}{6} \\ \frac{u - (2n+1)n^2}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

如果某队 Y 击败了 a 个队, 输给 b 个队, 那么以 Y 为中间元素的有序三元组的数目为 ab . 因为 $a+b=2n$, 由均值不等式, 有 $ab \leq n^2$.

因此, $u \leq (2n+1)n^2$, 从而 $t \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

等号当 $u = (2n+1)n^2$ 时达到, 即当所有参赛队排列在一个圆周上, 对每个参赛队而言, 在它顺时针方向的 n 个队被他击败, 在它逆时针方向上的 n 个队都击败它时取到最大值.

5 圆的内接直角 $\triangle ABC$ 的二个顶点分圆为二段弧, 直角顶点 A 所对的 \widehat{BC} 为一个半圆, $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ 为劣弧. 对三段弧的每一段作切线, 使切点恰为切线被直线 AB, AC 所截得的线段的中点. 例如过 \widehat{BC} 上一点 D 作切线, 分别交直线 AB, AC 于点 D', D'' , 使得 D 恰为线段 $D'D''$ 的中点. 类似地得到点 E 和 F .

求证: $\triangle DEF$ 是等边三角形.

【证明 1】记加一撇的字母为切线与 AB 的交点, 加双撇的字母为切线与 AC 的交点, 由已知有

$$DD' = DD'', EE' = EE'', FF' = FF''.$$

只需证

$$\widehat{EF} = \widehat{DF} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi.$$

$\because AF$ 是 $\text{Rt}\triangle AF''F'$ 的斜边上的中线, $\therefore FF' = FA$.

$$\therefore \widehat{AF} = 2\angle F''F'A = 2(\angle FF'A + \angle FAF')$$

$$= 4\angle FAF' = 4\angle FAB = 2\widehat{BF}.$$

$$\therefore \widehat{AF} = \frac{2}{3}\widehat{BA}. \text{ 同理, } \widehat{AE} = \frac{2}{3}\widehat{AC}.$$

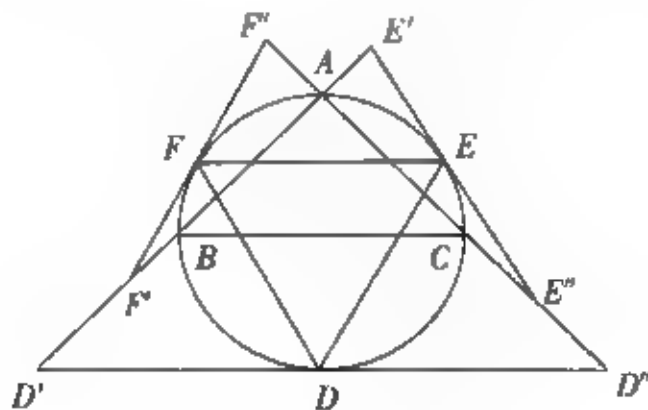
$$\therefore \widehat{FE} = \frac{2}{3}(\widehat{BA} + \widehat{AC}) = \frac{2\pi}{3}.$$

对于 \widehat{DF} , 有

$$\widehat{BD} = 2\angle BAD = \angle BAD + \angle BD'D$$

$$\angle ADD'' = \angle ABD = \frac{1}{2}\widehat{ACD}.$$

而 $\widehat{BF} = \frac{1}{2}\widehat{AF}$, $\therefore \widehat{DF} = \frac{1}{2}\widehat{FAD} = \frac{2\pi}{3}$, 故命题得证.



2006.5 图

【证明 2】 $\because \triangle AE'E''$ 是 $\text{Rt}\triangle$,

$\therefore AE - EE' - E'E'' \therefore \angle CAE = \angle CE'E$.

又 $\because AD = DD' = DD'' \therefore \angle CDD' = \angle CAD = \angle CD''D$.

$\because EADC$ 为圆内接四边形,

$\therefore 180^\circ - \angle EAD + \angle ECD = \angle DAC + \angle CAE + \angle ECA + \angle ACD$

$= \angle DAC + \angle CAE + \angle CE'E + \angle CE'E + \angle CDD' + \angle CD''D$

$= \angle DAC + \angle CAE + \angle CAE + \angle CAE + \angle CAD + \angle CAD$

$= 3(\angle DAC + \angle CAE) = 3\angle DAE$.

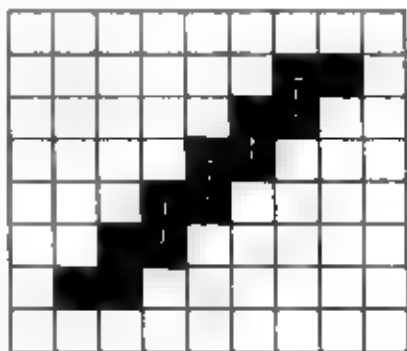
$\therefore \angle DFE = \angle DAE = 60^\circ$, 同理, $\angle DEF = 60^\circ$.

$\therefore \triangle DEF$ 是等边三角形.

第39届加拿大数学奥林匹克(2007)

1 在 8×9 的方格表上已经放置了 6 块 2×1 的多米诺骨牌,位置如图所示,则该棋盘上至多可以放置多少块多米诺骨牌(每块骨牌都在方格表内,且互不重叠,包含已放置的 6 块多米诺)?

【证明】首先将棋盘划分成五个部分, C 为放置的 6 个多米诺覆盖的部分, B 、 D 分别为右上角、左下角处的小方格, A 是 $B \cup C \cup D$ 左上方的方格的集合, E 是 $B \cup C \cup D$ 右下方的方格的集合.



2007 1 图

用黑白两色交替将方格表染色,使得 B 为白格,则 D 为黑格, A 中有 16 个白格、13 个黑格, E 有 16 个黑格、13 个白格. 则在 $A \cup B \cup D$ 中至多可以放入 14 个多米诺,在 $B \cup D \cup E$ 中至多可以放入 14 个多米诺,则至多可以放入 $14 \times 2 + 6 = 34$ 块多米诺. 这是可以达到的,我们只需在 $A \cup D$ 和 $E \cup B$ 中各放 14 块多米诺骨牌即可.

2 给定两个三角形满足如下条件:

- (1) 一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应相等;
- (2) 这两个三角形相似,但不一定全等.

求证:这两个三角形的相似比介于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 和 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 之间.

【证明】若三角形是等腰三角形,则这两个三角形一定全等,相似比为 1. 这是因为这两个三角形至少有一组对应边相等.

若三角形不是等腰三角形,不妨设这两个三角形的边长分别为 x, y, z ($x < y < z$) 和 y, z, u ($y < z < u$). 于是,

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{u}{z} = k > 1.$$

从而, $y = kx, z = ky = k^2x$.

因为 $z < x + y$, 所以 $k^2 < 1 + k$. 故 $1 < k < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

同理, 当 $x > y > z, y > z > u$ 时, 相似比为 $\frac{1}{k}$, 即有 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{1}{k} < 1$.

综上, 这两个三角形的相似比介于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 和 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 之间.

3 已知在 \mathbf{R} 上取值的函数 f 对任意实数 x, y , 均有

$$f(xy) + f(y-x) \geq f(y+x).$$

(1) 试给出一个满足条件的非常数多项式 $f(x)$;

(2) 求证: 对于任意实数 x , 均有 $f(x) \geq 0$.

(1) 【解】令 $f(x) = x^2 + 4$. 则

$$\begin{aligned} & f(xy) + f(y-x) - f(y+x) \\ &= (x^2y^2 + 4) + (y-x)^2 + 4 - (y+x)^2 - 4 \\ &= (xy)^2 - 4xy + 4 = (xy-2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

故 $f(x) = x^2 + 4$ 满足条件.

(2) 【证明 1】考虑满足 $xy = x + y$ 的数对 (x, y) , 则

$$(x-1)(y-1) = 1.$$

取 $y-1 = t$, 则 $x-1 = \frac{1}{t}$, 于是, 对于 $t \neq 0$,

$$(x, y) = (1 + \frac{1}{t}, 1 + t).$$

将其代入原函数不等式, 并化简得

$$f(t + \frac{1}{t}) \geq 0.$$

对于任意的实数 u , 方程 $t + \frac{1}{t} = u$ 即二次方程 $t^2 - ut + 1 = 0$ 的判别式大于 0, 即有实根 t .

因此, 对于任意的实数 u , 均有 $f(u) \geq 0$.

【证明 2】令 $v = y - x, u = y + x$, 则 $x = \frac{u-v}{2}, y = \frac{u+v}{2}$, 代入条件式, 有

$$f\left(\frac{u^2-v^2}{4}\right) + f(v) \geq f(u).$$

取 $u = 2 + \sqrt{v^2 + 4}$, 则 $\frac{u^2-v^2}{4} = 2 + \sqrt{v^2 + 4} = u$, 从而 $f(v) \geq 0$.

因此, 对于任意的实数 v , 均有 $f(v) \geq 0$.

4 对于满足 $ab \neq 1$ 的实数 a, b 定义运算“ $*$ ”:

$$a * b = \frac{a+b-2ab}{1-ab}.$$

现有一个项数为 $n (n \geq 2)$ 的实数列 S , 其所有项 x 均满足 $0 < x < 1$, 从 S 中任取两项 a, b , 将它们删除, 并将 $a * b$ 的值添在 S 的最后, 这样得到的新数列的项数就减少了 1. 重复该操作直到仅剩下一项.

(1) 求证: 最后剩下的一项的值与每一步操作中所取的两项无关;

(2)若 S 中的项的取值范围变为 $0 < x \leq 1$, 且 S 中恰有一项为 1, 又将会出现的什么样的结论?

(1)【证明】首先证明: 运算 $*$ 保持对于任意的 $a, b (0 < a, b < 1)$, 都有 $0 < a * b < 1$. 实际上, 由

$$a + b - 2ab = a(1-b) + b(1-a) > 0$$

及

$$1 - \frac{a+b-2ab}{1-ab} = \frac{(1-a)(1-b)}{1-ab} > 0,$$

可知

$$0 < \frac{a+b-2ab}{1-ab} < 1.$$

因此, 运算可以一直进行下去.

由 $a * b = \frac{a+b-2ab}{1-ab}$, 得

$$a * b = b * a,$$

且

$$a * (b * c) = (a * b) * c = \frac{a+b+c-2(ab+bc+ca)+3abc}{1-(ab+bc+ca)+2abc}.$$

由于最后剩下的一项是 S 中的 n 个数关于 $*$ 的运算, 且满足结合律和交换律, 因此, 最后的值与每次操作选取哪两项无关.

(2)【解】对于每一个 $a \neq 1, a * 1 = 1$. 因此, 1 总会在这个变化着的数列中, 直到最后只有一项. 所以, 最后剩下的一项为 1.

5 $\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边 BC, CA, AB 于点 D, E, F , $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 与 $\triangle AEF$ 的外接圆 $\odot O_1$ 、 $\triangle BFD$ 的外接圆 $\odot O_2$ 、 $\triangle CDE$ 的外接圆 $\odot O_3$ 分别交于点 A 和 P, B 和 Q, C 和 R . 求证:

(1) $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 交于一点;

(2) PD, QE, RF 三线交于一点.

(1)【证明】记 $\triangle ABC$ 的内心为 I , 注意到 $EI \perp AC$, $FI \perp AB$, 从而 A, E, F, I 共圆, 即 $\odot O_1$ 过 I , 同理 $\odot O_2, \odot O_3$ 也过 I . 从而, $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 共点于 I .

(2)【证明】如图, 连结 RE, RD, RA, RB . 则

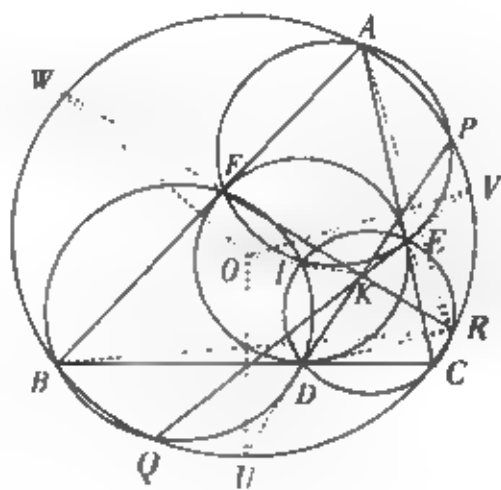
$$\angle ERD = \angle ECD = \angle ACB = \angle ARB.$$

于是, $\angle ARE = \angle BRD$.

又因为 $\angle REC = \angle RDC$, 所以, $\angle AER = \angle BDR$.

因此, $\triangle ARE \sim \triangle BRD$. 从而,

$$\frac{AR}{BR} = \frac{AE}{BD} = \frac{AF}{BF}.$$



2007.5 图

所以, RF 平分 $\angle ARB$. 因此, RF 过 $\odot O$ 的 \widehat{AB} 的中点 W .

同理, PD 、 QE 分别是 $\angle BPC$ 、 $\angle CQA$ 的角平分线, 且分别过 \widehat{BC} 、 \widehat{CA} 的中点 U 、 V .

又 PU 、 QV 、 RW 分别过点 D 、 E 、 F , 则只须证明: DU 、 EV 、 FW 三线交于一点.

因为 ID 、 OU 都垂直于 BC , 所以, $ID \parallel OU$.

同理, $IE \parallel OV$, $IF \parallel OW$.

又 $ID = IE = IF = r$, $OU = OV = OW = R$.

取 OI 的外比分点 K 满足 $\frac{OK}{KI} = \frac{R}{r}$.

则 UD 、 VE 、 WF 均过点 K . 从而, DU 、 EV 、 FW 三线交于一点.

第40届加拿大数学奥林匹克(2008)

1 凸四边形 $ABCD$ 中, AB 是最长边. 点 M, N 分别在边 AB, BC 上, 且线段 AN, CM 均平分四边形 $ABCD$ 的面积. 求证: 线段 MN 平分对角线 BD .

【证明 1】由 $S_{MADC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{NADC}$, 知

$$S_{\triangle ACM} = S_{\triangle ACN} \Rightarrow MN \parallel AC.$$

过点 D 作 $PQ \parallel AC$, 交 BA 的延长线于点 P , 交 BC 的延长线于点 Q , 则 $PQ \parallel AC \parallel MN$.

所以 $S_{\triangle BCM} - S_{\triangle BCM} - S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ACM} - S_{\triangle PAC} + S_{\triangle ACM} = S_{\triangle PCM}$.

从而 $PM = BM$, 同理 $BN = CQ$, 即 MN 是 $\triangle BPQ$ 的中位线, 设 BD 交 MN 于点 H , 则 $BH = HD$. 命题得证.

【证明 2】取 BD 中点 K , 则

$$\begin{aligned} S_{AKDC} &= S_{\triangle AKD} + S_{\triangle CKD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD} + \frac{1}{2}S_{\triangle CBD} \\ &= \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ANDC}, \end{aligned}$$

从而 $NK \parallel AC$.

同理, $MK \parallel AC$, 从而 M, N, K 三点共线.

故 MN 平分对角线 BD .

2 求所有函数 $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$, 使得对任意有理数 x, y , 均有

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + y.$$

【解】对任意 $x \in \mathbf{Q}$, $f(x) = x$ 或 $f(x) = -x$, 这均不难验证.

令 $y = x$, 则 $f(3f(x)) = 3x$.

令 $y = x = 3f(x)$, 则

$$f(9x) = f(3f(3f(x))) = 3 \cdot [3f(x)] = 9f(x).$$

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 9f(0)$, 则 $f(0) = 0$.

将 $x = 0$ 代入所给等式, 则对任意 $y \in \mathbf{Q}$, 有 $f(f(y)) = y$, 故 f 为 \mathbf{Q} 上的对合映射. 从而对任意有理数对 (x, y) , 有

$$2f(x) + f(y) = f(2x + y).$$

当 $y = 0$ 时, 有 $f(2f(x)) = 2x$, 因此有 $2f(x) = f(2x)$.

所以对于任意有理数对 (x, y) , 有

$$f(2x) + f(y) = f(2x + y).$$

令 $u=2x, v=y$, 则对任意有理数对 (u, v) , 均有

$$f(u+v) = f(u) + f(v).$$

由 $0 = f(0) = f(-1) + f(1)$, $f(-1) = -f(1)$, 利用归纳法, 易知, 对整数 n 和有理数 x , $f(nx) = nf(x)$.

令 $k = f(1)$, 则 $f(n) = nk$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{k}{n}$, 且对任意整数对 (m, n) , 有 $f(\frac{m}{n}) = \frac{mk}{n}$, 所以 $f(x) = kx$, 又 $f(f(x)) = x$, 所以 $k^2 = 1$.

从而 $f(x) = x$ 或 $f(x) = -x$.

3 若 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 且 $a+b+c=1$, 求证:

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{【证明 1】注意到 } \frac{a-bc}{a+bc} &= \frac{2a}{a+bc} - 1 = \frac{2a}{1-b-c+bc} - 1 \\ &= \frac{2a}{(1-b)(1-c)} - 1 = \frac{2a}{(a+c)(a+b)} - 1, \end{aligned}$$

从而原不等式等价于

$$\frac{a}{(a+c)(a+b)} + \frac{b}{(b+c)(a+b)} + \frac{c}{(a+c)(c+b)} \leq \frac{9}{4}.$$

$$\text{即 } a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) \leq \frac{9}{4}(b+c)(a+b)(c+a).$$

$$\text{即 } 8(ab+bc+ca) \leq 9(1-a)(1-b)(1-c).$$

展开, 整理, 并注意到 $a+b+c=1$, 知上式等价于

$$ab+bc+ca \geq 9abc.$$

而

$$\begin{aligned} ab+bc+ca &= (a+b+c)(ab+bc+ca) \\ &= a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + ca^2 + c^2a + 3abc \\ &\geq 6abc + 3abc = 9abc. \end{aligned}$$

故不等式得证.

$$\text{【证明 2】注意到 } 1 - \frac{a-bc}{a+bc} = \frac{2bc}{1-b-c+bc} = \frac{2bc}{(1-b)(1-c)},$$

从而原不等式等价于

$$\frac{2bc}{(1-b)(1-c)} + \frac{2ca}{(1-c)(1-a)} + \frac{2ab}{(1-a)(1-b)} \geq \frac{3}{2}.$$

化简, 有 $4(ab+bc+ca-3abc) \geq 3(ab+bc+ca+1-a-b-c-abc)$.

$$\text{即证 } ab+bc+ca \geq 9abc, \text{ 或 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9.$$

由算术-调和平均不等式立得证明.

【证明 3】注意到 $a+bc = a(a+b+c) + bc = (a+b)(a+c)$, 则

原不等式等价于

$$\begin{aligned} \sum(b+c)(a^2+ab+ac-bc) &\leq \frac{3}{2}(b+c)(a+b)(c+a), \\ \Leftrightarrow \sum(a^2b+ca^2+ab^2+ac^2-b^2c-bc^2+2abc) \\ &\leq \frac{3}{2}(a^2b+ca^2+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+2abc) \\ \Leftrightarrow \sum(a^2b+ab^2) &\geq 6abc, \end{aligned}$$

这由 AM-GM 不等式知显然成立.

4 求所有函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 使得对任意自然数 n 和素数 p , 均有

$$(f(n))^p \equiv n \pmod{f(p)}.$$

【解】取 n 为任一素数 p , 则

$$p \equiv 0 \pmod{f(p)},$$

故 p 被 $f(p)$ 整除, 从而 $f(p) = 1$ 或 p .

设 $S = \{p \mid p \text{ 为素数且 } f(p) = p\}$.

则对每个 $n \in \mathbb{N}^*$ 和 $p \in S$, 由 Fermat 小定理, 有

$$n \equiv (f(n))^p \equiv f(n) \pmod{p}, p \mid (f(n) - n).$$

若 S 为无限集, 由于此式对无穷多个 p 成立, 故 $f(n) = n$. 显然 $f(n) = n$ 是一个解.

若 S 为空集, 即所有 $f(p) = 1$, 题给条件对任意 $f(n)$ 均成立, 故当 n 非素数时 $f(n)$ 可为任意值.

若 S 为非空有限集, 设 a 是 S 的最大元, 则对每个素数 $q > a$, $f(q) = q - 1 - q$ 应当被 a 整除, 即 $q \equiv 1 \pmod{a}$.

若 $a > 2$ (a 为奇素数), 令 Q 是所有不大于 a 的奇素数之积, 则 $Q + 2$ 是奇数且与 Q 互素, 它的所有素因子均大于 a , 从而均 $\equiv 1 \pmod{a}$. 因此 $Q + 2 \equiv 1 \pmod{a}$, 矛盾.

故只能 $S = \{2\}$. 其他 $f(p) = 1$, 当 n 非素数时 $f(n)$ 可为与 n 同奇偶的任意值.

因此满足本题条件的 f 有且只有三种:

(1) $f(n) = n (n \in \mathbb{N}^*)$;

(2) $f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 为素数}, \\ \text{任意值}, & n \text{ 为非素数}; \end{cases}$

(3) $f(n) = \begin{cases} 2, & n = 2, \\ 1, & n \text{ 为奇素数}, \\ \text{与 } n \text{ 同奇偶的任意值}, & n \text{ 为非素数}. \end{cases}$

5 国际象棋棋盘上“车”的自避行走是指“车”这样行走的一条踪迹路径: 从一个方格出发穿过两个方格之间的公共边界(不能斜着走)进入另一个方格, 但走过的方格不能再走, 即“车”的路径是不自交的. 令 $R(m, n)$ 表示 $m \times n$ 的棋盘 (m 行, n 列) 上自避行走的“车”从左下角走到左上角的路径的数目.

例如: $R(m, 1) = 1, R(2, 2) = 2, R(3, 2) = 4, R(3, 3) = 11$. 求出 $R(3, n)$ 的表达式(用 n 表示).

【解1】令 $r_n = R(3, n)$, 显然 $r_1 = 1, r_2 = 4$, 用 (i, j) 表示方格的坐标, 问题变为从 $(1, 1)$ 到 $(3, 1)$ 的种数.

若 $n \geq 3$, 有以下 6 种情况:

(1) 路线为: $(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1)$;

(2) 避开 $(2, 1)$: 任何一种这样的走法开始都要经过 $(1, 1) \rightarrow (1, 2)$, 最终经过 $(3, 2) \rightarrow (3, 1)$, 有 r_{n-1} 种走法;

(3) 开始时: $(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2)$, 不再回到第一行, 这样的走法在 $(2, k) (2 \leq k \leq n)$ 处进入第三行, 然后一直向右走到 $(3, 1)$, 有 $n-1$ 种走法;

(4) 路线: 开始时 $(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow \cdots \rightarrow (2, k) \rightarrow (1, k) \rightarrow (1, k+1)$, 结束时为 $(3, k+1) \rightarrow (3, k) \rightarrow (3, k-1) \rightarrow \cdots \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 1) (2 \leq k \leq n-1)$, 有 $r_{n-2} + r_{n-3} + \cdots + r_1$ 种走法;

(5) 按(3)中的水平反射图像行走, 开始为 $(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow \cdots$, 直到最后一步再进入第三行, 有 $n-1$ 种走法;

(6) 按(4)中的水平反射图像行走, 有 $r_{n-2} + r_{n-3} + \cdots + r_1$ 种走法.

因此 $r_3 = 1 + r_2 + 2(2 + r_1) = 11$, 对于 $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} r_n &= 1 + r_{n-1} + 2[(n-1) + r_{n-2} + r_{n-3} + \cdots + r_1] \\ &= 2n - 1 + r_{n-1} + 2(r_{n-2} + r_{n-3} + \cdots + r_1), \\ r_{n+1} &= 2n + 1 + r_n + 2(r_{n-1} + r_{n-2} + \cdots + r_1), \end{aligned}$$

因此: $r_{n+1} - r_n = 2 + r_n + r_{n-1}$

$$\Rightarrow r_{n+1} = 2 + 2r_n + r_{n-1}.$$

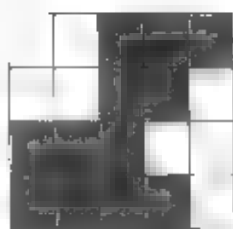
所以, $r_{n+1} + 1 = 2(r_n + 1) + (r_{n-1} + 1)$.

$$\text{则} \quad r_n + 1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^{n+1},$$

$$r_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^{n+1} - 1.$$

第41届加拿大数学奥林匹克(2009)

1 给定 $m \times n$ 方格表, 其中每个方格被染成黑色或白色的. 若某个黑格的同一行左边有白色方格, 且同一列上边有白色方格, 则称这个黑格为“坏方格”(如图, 为一个不含有“坏方格”的 4×5 方格表). 求不含“坏方格”的 $2 \times n$ 方格表的数目的表达式.



2009.1 题图

【解1】由题意, 第一行肯定不含有“坏方格”, 下考虑第二行.

设第二行的前 k 个方格均为黑色, 第 $k+1$ 个为白色 ($k \leq n-1$), 此时第一行对应的前 $k+1$ 个方格, 每个均有 2 种选择, 前 $k+1$ 列共有 2^{k+1} 种可能.

而后面的 $n-k-1$ 列中, 上下两个方格的组合不能为上白下黑, 故每一列有 3 种选择: 上黑下白、上黑下黑或上白下白, 从而有 3^{n-k-1} 种选择.

当 $k=n$ 时, 也即第二行均为黑色方格时, 第一行可任意选取, 共 2^n 种可能.

$$\begin{aligned} \text{综上, } f(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \cdot 3^{n-k-1} + 2^n \\ &= 3^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + 2^n = 2 \cdot 3^n - 2^n. \end{aligned}$$

【解2】记不含“坏方格”的 $2 \times n$ 方格表的数目为 $f(n)$, 易得

$$f(1) = 2^2 = 4, f(2) = 2^4 - 2 = 14.$$

下面通过对最右一列不同情形的讨论来确定不含“坏方格”的 $2 \times (n+1)$ 方格表的数目:

(1) $2 \times (n+1)$ 方格表的最后一列, 上下均为白格, 此类适合条件的方格表的数目即为 $f(n)$;

(2) $2 \times (n+1)$ 方格表的最后一列, 上下均为黑格, 此类适合条件的方格表的数目也为 $f(n)$;

(3) $2 \times (n+1)$ 方格表的最后一列, 上为黑格, 下为白格, 此类适合条件的方格表的数目也为 $f(n)$;

(4) $2 \times (n+1)$ 方格表的最后一列, 上为白格, 下为黑格, 此时, 要不存在“坏方格”, 必须下方所有方格均为黑色, 共 2^n 种情形.

$$\text{综上, } f(n+1) = 3f(n) + 2^n.$$

$$\text{从而, } f(n-1) = 3f(n-2) + 2^{n-2} \Rightarrow 2f(n-1) = 6f(n-2) + 2^{n-1}.$$

用 $f(n) = 3f(n-1) + 2^{n-1}$ 减去上式, 并整理得

$$f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2).$$

解对应的特征方程 $x^2 - 5x - 6 = 0$, 得特征根 $x = 2$ 或 3 , 从而

$$f(n) = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n.$$

利用初始条件 $f(1) = 4, f(2) = 14$, 解得 $A = 2, B = -1$.

从而 $f(n) = 2 \cdot 3^n - 2^n$.

【解 3】同解 2 得到 $f(n+1) = 3f(n) + 2^n$.

两边同除以 3^{n+1} , 并记 $a_n = \frac{f(n)}{3^n}$, 得

$$a_n = a_{n-1} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

从而, 累加可得 $a_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^0 \right) + a_0$.

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right)}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{4}{3} = 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

从而 $f(n) = 2 \cdot 3^n - 2^n$.

2 用纸板裁剪出两个半径不同的圆, 每个圆再分成 200 个相等的扇形, 且将每个圆的 100 个扇形涂成白色, 另 100 个扇形涂成黑色. 将小圆叠放在大圆的上面, 使得它们的圆心重合.

求证: 总可以旋转小圆, 使得这两个圆的扇形上下对齐, 且小圆至少有 100 个扇形位于大圆的同色扇形上.

【解 1】在每个白色的扇区上标上数字 -1 , 在每个黑色的扇区上标上数字 1 . 定义两个对齐扇区的“相对值”为这两个扇区上数字的乘积, 则当两个对齐的扇区同色时值为 1 , 异色时值为 -1 , 问题即转化为:

存在一个对应方式, 使得各对齐扇区的“相对值”的和 ≥ 0 .

现任意给出两个圆的一种对齐方式, 记此时各对齐扇区的“相对值”的和为 a_1 , 然后将小圆顺次逆时针旋转 1 格, 将每次对应的“相对值”的和分别记为 $a_i (i = 2, 3, \dots, 200)$, 设大圆上各扇形标记数字为 $x_i (i = 1, 2, \dots, 200)$, 小圆上各扇形标记数字为 $y_i (i = 1, 2, \dots, 200)$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{200} a_i &= \sum_{i=1}^{200} x_i (y_1 + y_2 + \cdots + y_{200}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{200} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{200} y_i \right) = 0. \end{aligned}$$

从而必存在一个 $a_i \geq 0$, 命题得证.

【解 2】假设结论不成立, 则在任意位置, 同色的扇形数目均少于 100 个.

先将小圆绕圆心旋转,每次转动一格,共转动 199 次,这样小圆共到达 200 个不同的位置,由假设,这个 200 个位置中同色扇形的数目总和 $< 100 \times 200 = 20000$ 个.

考查小圆上的任意白色扇形,因为旋转了一周,故它同大圆上任一白色扇形均对齐过,也即小圆上任一白色扇形对总的同色扇形数目的贡献为 100,同样的,小圆上的每个黑色扇形对总的同色扇形的数目的贡献也为 100,从而总的同色扇形数目为

$$100 \times 100 + 100 \times 100 = 20000.$$

这导致矛盾,表明我们的反设不成立,故命题得证.

3 定义
$$f(x, y, z) = \frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)}{(x + y)(y + z)(z + x)},$$

其中 x, y, z 为正实数,求 $f(x, y, z)$ 的值域.

【解】 $f(x, y, z)$ 的值域为 $\left(1, \frac{9}{8}\right]$, 注意到

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)}{(x + y)(y + z)(z + x)} \\ &= 1 + \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}, \end{aligned}$$

只需说明 $0 < \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)} \leq \frac{1}{8}$ 且可取 $\left(0, \frac{1}{8}\right]$ 内的所有值.

注意到 x, y, z 为正实数, 左边不等式显然成立. 又

$$\begin{aligned} \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)} &\leq \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y - 6xyz &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x(y^2 + z^2) - 2xyz + y(x^2 + z^2) - 2xyz + z(y^2 + x^2) - 2xyz &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x(y - z)^2 + y(x - z)^2 + z(x - y)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

最后一式显然成立, 当且仅当 $x = y = z$ 时取等号.

下证 $\frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$ 可取 $\left(0, \frac{1}{8}\right]$ 内的任意值.

令 $y = z = 1$, 则 $g(x) = \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)} = \frac{x}{2(1 + x)^2}$, 从而当 $x = 1$ 时, $g(x) = \frac{1}{8}$, 且 x 趋向于 0 时, $g(x)$ 趋向于 0, 由 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上的连续性知, $g(x)$ 可取 $\left(0, \frac{1}{8}\right]$ 内的任意值.

【评注】值域的前半部分还可用基本不等式解决:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)}{(x + y)(y + z)(z + x)} \\ &= 1 + \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)} \end{aligned}$$

$$\leq 1 + \frac{xyz}{2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx}} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}.$$

4 求所有的有序整数组 (a, b) , 使得 $3^a + 7^b$ 为完全平方数.

【解】显然, a, b 均为非负整数. 设 $3^a + 7^b = n^2$ (n 为正整数), 首先两边 mod 4, 得

$$n^2 = 3^a + 7^b \equiv (-1)^a + (-1)^b \pmod{4}.$$

注意到 $n^2 \not\equiv 2 \pmod{4}$, 则 a, b 必为一奇一偶. 下分别讨论:

情形 1: a 为奇数, b 为偶数, 设 $b = 2c$, 则

$$3^a - n^2 = 7^b - (n+7^c)(n-7^c).$$

注意到 $n+7^c - (n-7^c) = 2 \cdot 7^c$ 不为 3 的倍数, 则 $n+7^c$ 和 $n-7^c$ 不可能均为 3 的倍数, 故必有 $n-7^c = 1$, 从而 $3^a = 2 \cdot 7^c + 1$.

若 $c=0$, 则 $a=1$, 从而 $(a, b) = (1, 0)$ 为一组解.

若 $c \geq 1$, 则 $3^a \equiv 1 \pmod{7}$, 易知使得 $3^a \equiv 1 \pmod{7}$ 的最小正整数 $a = 6$, 从而满足上式的 a 均为 6 的倍数, 这与 a 为奇数矛盾.

情形 2: a 为偶数, b 为奇数, 设 $a = 2c$, 则

$$7^b = n^2 - 3^a = (n+3^c)(n-3^c).$$

注意到 $n+3^c - (n-3^c) = 2 \cdot 3^c$ 不为 7 的倍数, 则 $n+3^c$ 和 $n-3^c$ 不可能均为 7 的倍数, 故必有 $n-3^c = 1$, 从而 $7^b = 2 \cdot 3^c + 1$.

若 $c=1$, 则 $b=1$, 从而 $(a, b) = (2, 1)$ 为一组解.

若 $c > 1$, 则 $7^b \equiv 1 \pmod{9}$. 而使得 $7^b \equiv 1 \pmod{9}$ 的最小正整数 $b = 3$, 从而满足上式的 b 均为 3 的倍数, 设 $b = 3d$, 注意到 d 为大于等于 1 的奇数, 并记 $y = 7^d$, 则 $y^3 \equiv 1 \pmod{2 \cdot 3^c}$, 从而

$$2 \cdot 3^c = (y-1)(y^2+y+1).$$

注意到 y^2+y+1 为奇数, 则

$$y-1 = 2 \cdot 3^u, y^2+y+1 = 3^v$$

其中 u, v 为正整数, 且 $v \geq 2$. 又由

$$3y = (y^2+y+1) - (y-1)^2,$$

知 $9 \mid 3y$, 从而 $3 \mid y$, 这与 $3 \nmid y-1$ 矛盾.

综上知, $(a, b) = (1, 0)$ 或 $(2, 1)$.

5 已知一个给定的平面点集^①中, 任意三点都可被一个半径为 1 的圆覆盖. 求证: 这个点集能被一个半径为 1 的圆覆盖.

① 这里的平面点集应为有限集

【证明】设 D 是能覆盖点集中所有点的半径最小的圆. 下考虑点集中落在圆周上的点.

注意到, 若点集中的点均在一段劣弧上, 则可将圆朝这些点移动一些, 并将半径变得更小一些, 仍能保证覆盖点集. 但这与 D 的半径最小性矛盾, 故点集中的点不可能都在劣弧上.

若点集中两点恰为圆 D 的一条直径的两端点, 则 D 是能覆盖这两点的最小圆, 从而半径至多为 1.

若点集中有三个点不在同一段劣弧, 则 D 是最小能覆盖这三个点的圆, 且半径至多为 1.

若点集中有 3 个以上的点不在同一段劣弧上, 则可去掉其中一个, 使得剩下的点都不在劣弧上, 最后回归到有 3 个点的情形.

事实上, 对 D 上的 4 个或更多的点, 任取半圆上的 3 个点, 则中间的一个点可以去掉.

三、附录部分

附录 1 第 1~21 届加拿大数学奥林匹克试题(1969~1989)

第一届(1969 年)

1 证明: 如果 $\frac{a}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ 并且 P, P_2, P_3 不全为零, 那么对每个正整数 n , 有 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{P a_1^n + P_2 a_2^n + P_3 a_3^n}{P b_1^n + P_2 b_2^n + P_3 b_3^n}$.

2 已知数 c 大于 1, 求证两数 $\sqrt{c+1} - \sqrt{c}, \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$ 的一个总是大于另一个.

3 设 c 是直角三角形斜边的长, 另两边的长是 a 和 b , 求证: $a + b \leq \sqrt{2}c$, 等式什么时候成立?

4 设 ABC 是等边三角形, P 是三角形内任意点, 作三角形三边的垂线 PD, PE, PF, D, E, F 是垂足, 试证不管 P 在哪里, 总有 $\frac{PD+PE+PF}{AB+BC+CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

5 设 ABC 是边长为 a, b, c 的三角形, 角 C 的平分线交 AB 于 D , 求证 CD 的长是 $\frac{2ab\cos \frac{C}{2}}{a+b}$.

6 求 $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! + n \cdot n!$ 的和, 这里 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$.

7 求证方程 $a^2 + b^2 - 8c = 6$ 无整数解.

8 设 f 是具有下列性质的函数:

(1) $f(n)$ 对每个正整数 n 有定义;

(2) $f(n)$ 是整数;

(3) $f(2) = 2$;

(4) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ 对一切 m 和 n ;

(5) $f(m) > f(n)$, 当 $m > n$ 时.

试证: $f(n) = n$.

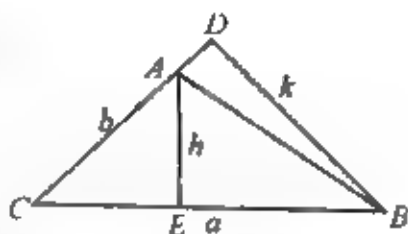
9 证明半径为1的圆内接四边形最短边不大于 $\sqrt{2}$.

10 设 ABC 是等腰直角三角形, 它的腰长是1, P 是斜边 AB 上一点, 由 P 到其他两边的垂线足是 Q 和 R , 考虑三角形 APQ 和 PBR 的面积, 以及矩形 $QCRP$ 的面积, 证明无论 P 怎样选取, 这三个面积中最大的至少是 $2/9$.

第二届(1970年)

1 求所有三数组 (x, y, z) , 使得其中任何一数加上其他两数的积, 结果都是 2.

2 已知 $\triangle ABC$ 有钝角 A 和高线长 h 及 k , 如图所示, 证明 $a + h \geq b + k$, 并求在何时等号成立.



3 已知 组球, 每个球染成红色或蓝色, 每色至少有一个球, 每个球重 1 磅或 2 磅, 每种重量至少有一个球, 证明有两个球具有不同的重量和不同的颜色.

4 (1) 求一切正整数, 它的首位码是 6, 去掉这个 6, 所成整数是原整数的 $\frac{1}{25}$.

(2) 证明没有这样的整数, 去掉它的第一个数码 6 所得结果是原整数的 $\frac{1}{35}$.

5 一个四边形在边长为 1 的正方形各边上各有一点, 证明四边形的边长 a, b, c, d 满足不等式 $2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4$.

6 已知三个不共线的点 A, B, C , 以 C 为中心作圆, 使得由 A 和 B 到圆的切线是平行的.

7 证明: 由不必相异的五个整数一定可选取其中三个整数, 其和能被 3 整除.

8 考虑一端在直线 $y = x$ 上, 另一端在直线 $y = 2x$ 上, 而其长为 4 的一切直线段, 求这些线段中点轨迹的方程.

9 设 $f(n)$ 是数列

$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \dots$

前 n 项的和.

(1) 给出 $f(n)$ 的公式.

(2) 证明 $f(s+t) - f(s-t) = st$, 其中 s 和 t 是正整数, 并且 $s > t$.

10 已知有整系数 a_1, a_2, \dots, a_n 的多项式

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

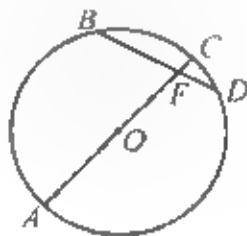
又已知存在四个不同的整数 a, b, c, d , 使得

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5,$$

证明: 没有整数 k , 使得 $f(k) = 8$.

第三届(1971 年)

1 设 DEB 是圆的弦, $DE = 3$, $EB = 5$. 又 O 是圆心, 连结 OE 且延长交圆于 C (如图). 已知 $EC = 1$. 求圆的半径.



2 设 x 和 y 是正实数, 且 $x + y = 1$, 证明: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$.

3 设 $ABCD$ 是四边形, $AD = BC$. 如果 $\angle ADC > \angle BCD$, 证明 $AC > BD$.

4 确定一切实数 a 使两个多项式 $x^2 + ax + 1$ 和 $x^2 + x + a$ 至少有一个公共根.

5 设 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中系数 a_i 是整数. 如果 $P(0)$ 和 $P(1)$ 都是奇数, 证明: $P(x)$ 没有整数根.

6 证明: 对一切整数 n , $n^2 + 2n + 12$ 不是 121 的倍数.

7 设 n 是五位数 (第一位数码不是零), m 是由 n 取消它的中间一位数码后所成的四位数. 试确定一切 n 使得 n/m 是整数.

8 正五边形内接于半径为 r 的圆, P 是五边形内任意点, 由 P 作垂线到各边或其延长线上.

(1) 证明这些垂线长是常数;

(2) 用半径 r 表示这个常数.

9 长 h 和 k 的两根旗杆竖在水平面上, 相隔 $2a$ 单位, 求平面上对杆顶仰角相等的一切点的集合.

10 假定 n 个人各恰好知道一个消息, 而所有 n 个消息都不相同. 每次“ A ”打电话给“ B ”, “ A ”都把所知道的一切告诉“ B ”, 而“ B ”却不告诉“ A ”什么消息. 为了使各人都知道一切消息, 求所有需要两人之间通话的最少次数. 证明你的答案是正确的.

第四届(1972年)

1 给定三个单位圆,两两相切,求切于所有这三个圆的半径.

2 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是非负实数,定义 M 为一切乘积 $a_i a_j (1 \leq i < j)$ 的和,即

$$M = a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_n) + a_2(a_3 + a_4 + \dots + a_n) + \dots + a_{n-1}a_n.$$

证明:数 a_1, a_2, \dots, a_n 至少有一个的平方不超过 $\frac{2M}{n(n-1)}$.

3 (1)证明 10201 在大于 2 的任何进位制记数法中都是合数.

(2)证明 10101 在任何进位制记数法中都是合数.

4 叙述四边形 $ABCD$ 的作法,已知:

(1)所有四边的长;

(2) AB 与 CD 平行;

(3) BC 与 DA 不相交.

5 证明方程 $x^3 + 11^3 = y^3$ 没有正整数解.

6 设 a 和 b 是相异的实数,证明存在整数 m 和 n 使得

$$am + bn < 0, bm + an > 0.$$

7 (在下面三问题中不用数表、计算器等等作为“辅助”.)

(1)证明满足 $x = (x^2 + 1)/198$ 的 x 的值在 1/198 和 197.99494949... 之间;

(2)用(1)的结果证明 $\sqrt{2} < 1.41421356$;

(3) $\sqrt{2} < 1.41421356$, 对吗?

8 在某次竞选运动中,各个政党共作出 p 种不同的诺言 ($p > 0$),某些政党可以作出相同的诺言,任何两党都至少有一种公共诺言,但没有两党作出全部相同的诺言.证明:政党的个数不多于 2^{p-1} .

9 在平面内已知四条不同的直线 l_1, l_2, l_3, l_4 ; l_1 和 l_2 分别平行于 l_3 和 l_4 , 求到四直线距离的和是常数的动点轨迹.

10 在公比大于 1 的等比数列中, 最多有几项是在 100 和 1000 之间的整数?

第五届(1973年)

1 (1)解不等式组 $\begin{cases} x < \frac{1}{4x}, \\ x < 0. \end{cases}$

(2)同时满足两个不等式 $4x + 13 < 0$ 和 $x^2 + 3x > 16$ 的最大整数是什么?

(3)给出在 $11/24$ 和 $6/13$ 之间的有理数.

(4)把 100000 表示为两个整数的乘积,使其中没有一个是 10 的倍数.

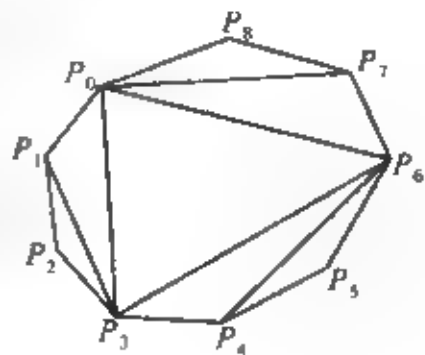
(5)不用对数表,计算 $\frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\log_3 36}$.

2 求满足方程 $|x+3| - |x-1| = x+1$ 的一切实数.

3 证明:若 p 和 $p+2$ 都是大于 3 的素数,那么 6 是 $p+1$ 的因数.

4 下图表示有九个顶点的凸多边形.已经画出的六条对角线分割多边形为七个三角形: $P_0P_1P_3$, $P_0P_3P_6$, $P_0P_6P_7$, $P_0P_7P_8$, $P_1P_2P_3$, $P_3P_4P_6$, $P_4P_5P_6$.

有多少方法可以把这些三角形命名为 $\triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_7$,使得 P_i 是三角形 \triangle_i 的一个顶点, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$? 证明你的答案.



5 对每个正整数 n , 设 $h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. 例如 $h(1) = 1$, $h(2) = 1 + \frac{1}{2}$, $h(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, 对 $n \geq 2$, 证明: $n + h(1) + h(2) + \dots + h(n-1) = nh(n)$.

6 若 A 和 B 是已知圆上的定点,与圆心 O 不共线, XY 是变动直径,求 P 通过 A, X 的直线和通过 B, Y 的直线的交点的轨迹.

7 观察 $\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$; $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$.

由这些例子的启发,叙述一般规律,并加以证明.对任何大于 1 的整数 n , 证明:存在正整数 i 和 j , 使得

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(i+1)(i+2)} + \frac{1}{(i+2)(i+3)} + \dots + \frac{1}{j(j+1)}.$$

第六届(1974年)

A 部

1 (1) 如果 $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, 求证:

$$y^x = x^y.$$

(2) 对一切正整数 n , 证明

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^n (n-1)^2 + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} (1+2+\cdots+n).$$

2 设 $ABCD$ 是矩形, $BC = 3AB$, 证明: 如果 P, Q 是 BC 边上的点, $BP = PQ = QC$, 那么 $\angle DBC + \angle DPC = \angle DQC$.

B 部

3 设 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 是多项式, 系数满足条件: $0 \leq a_i \leq a$, $i = 1, 2, \dots, n$. 设 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ 是多项式

$$\{f(x)\}^2 = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)^2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_{2n}x^{2n}$$

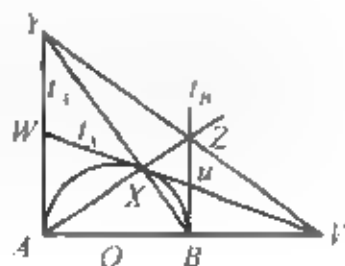
的系数. 证明 $b_{n+1} \leq \frac{1}{2}(f(1))^2$.

4 设 n 是固定的正整数, 对于满足 $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ 的任何 n 个实数, 对应着和式

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| &= |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \cdots + |x_1 - x_{n-1}| + |x_1 - x_n| + |x_2 - x_3| \\ &\quad + |x_2 - x_4| + \cdots + |x_2 - x_{n-1}| + |x_2 - x_n| + \cdots + |x_{n-2} \\ &\quad - x_{n-1}| + |x_{n-2} - x_n| + |x_{n-1} - x_n|. \end{aligned}$$

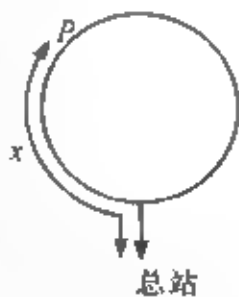
设 $S_{(n)}$ 表示和式的最大可能值. 求 $S_{(n)}$.

5 已知直径为 AB 的圆和圆上另一点 X . 设 t_A, t_B 和 t_X 分别是这个圆在 A, B, X 的切线. 设 Z 是直线 AX 与 t_B 交点, Y 是直线 t_A 与 BX 的交点. 证明: 三直线 YZ, t_X, AB 共点或平行.



6 8分和15分的邮票可以无限制地取用. 某些邮资额数, 例如7分、29分, 不能够刚好凑成, 求不能凑成的最大额数 n , 即大于 n 的额数都能够凑成(证明你的答案).

7 汽车路线由周长10英里的环路和从总站到环路上 Q 点长1英里的直线组成(如图), 两部汽车在路上服务, 每部周游需要20分, 1号车离开总站, 沿着直路走, 按顺时针方向绕环路一次, 又沿直线回到总站. 2号车到达总站比1号车迟10分, 走同样的路线, 但按反时针方向绕行环路. 两部车连续行驶, 在路上的任何地点都不耽搁, 只有让乘客上、下车的时间可以忽略.



一个人打算在地点 P 候车, 那里沿1号车路线离开总站 x 英里 ($0 \leq x < 12$), 要搭车到总站去. 假定他搭上使他尽早达到目的地的汽车, 他的旅行所需的最长的时间为 $W(x)$ (候车时间加乘车时间).

求 $W(2)$ 、 $W(4)$.

对于 x 的什么值, 时间 $W(x)$ 最长?

对 $0 \leq x < 12$ 画出 $y = W(x)$ 的草图.

第七届(1975 年)

1 化简 $\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \cdots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \cdots + n \cdot 3n \cdot 9n} \right)^{\frac{1}{3}}$.

2 数列 a_1, a_2, a_3, \dots 满足

(1) $a_1 = \frac{1}{2}$, (2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n \geq 1)$.

确定 a_n 的值 ($n \geq 1$).

3 对每个实数 r , $[r]$ 表示小于或等于 r 的最大整数, 例如 $[6] = 6$, $[\pi] = 3$, $[-1.5] = -2$, 在 (x, y) 平面上指示满足 $[x]^2 + [y]^2 \leq 4$ 的一切点 (x, y) .

4 对于像 3.27 这样的正数, 3 叫做这个数的整数部分, 27 叫做小数部分, 求一个正数它的小数部分、它的整数部分和这个数本身是等比数列的连续三项.

5 A, B, C, D 是圆周上“相继的”四点, P, Q, R, S 分别是弧 AB, BC, CD, DA 的中点, 证明 $PR \perp QS$.

6 (1) 15 个席位同等地围绕着圆桌安排, 席上有 15 个客人的名片, 客人们没有注意这些名片, 直到他们坐下来, 才发觉没有一个人坐在自己的名片前面. 证明可以转动圆桌使得至少有两个客人同时对号入座.

(2) 举出一种入席顺序的例子, 使这 15 个人中恰好有一个客人对号入座, 而转动圆桌并不能使更多的客人对上号.

7 如果存在正数 p 使得对一切 x 都有 $f(x+p) = f(x)$, 那么 $f(x)$ 就是周期函数. 例如, $\sin x$ 是周期为 2π 的周期函数. 问 $\sin(x^2)$ 是周期函数吗?

8 设 k 是正整数, 求一切多项式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

其中 a_i 是实数, 满足等式 $P(P(x)) = [P(x)]^k$.

第八届(1976年)

1 给定成等比数列的四个砝码和一架等臂天平,说明怎样只用这天平两次就找出最重的砝码.

2 对各个正整数 $n \geq 1$, 假设

$$n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1}.$$

已知 $a_0 = 1, a_1 = 2$, 求

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{50}}{a_{51}}.$$

3 两个七年级学生被允许参加八年级学生所组成的象棋比赛,每个选手都同其他每个选手比赛一次,胜就得一分,和就得半分,输就得零分.两个七年级学生共得了8分,每个八年级学生都和他的同年级同学得到同样分数.问有几个八年级的学生参加象棋比赛?答案是唯一的吗?

4 设 AB 是圆的直径, C 是这个直径上 A 和 B 之间的任一固定点, Q 是圆周上的变动点, 设 P 是由 Q 和 C 所确定的直线上的点, 且 $\frac{AC}{CB} = \frac{QC}{CP}$, 描述并证明 P 点的轨迹.

5 证明:一个正整数是至少两个连续正整数的和,必须而且只须它不是2的乘幂.

6 如果 A, B, C, D 是空间中四点, 且 $\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = \pi/2$. 证明 A, B, C, D 共面.

7 设 $P(x, y)$ 是两个变量 x, y 的多项式, 对各个 x, y , 有 $P(x, y) = P(y, x)$ (例如多项式 $x^2 - 2xy + y^2$ 就满足这个条件).

已知 $(x - y)$ 是 $P(x, y)$ 的因子, 证明 $(x - y)^2$ 是 $P(x, y)$ 的因子.

8 连结圆周上9个不同点的36条直线染成红色或蓝色, 假定由9点中每3点所确定的三角形都至少含有一条红色边. 证明有四点, 其中每两点的连线都是红色的.

第九届(1977 年)

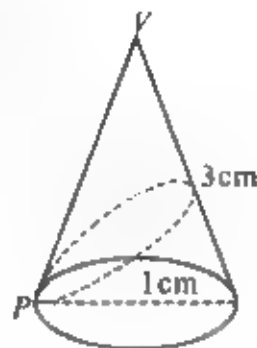
1 如果 $f(x) = x^2 + x$, 证明方程 $4f(a) = f(b)$ 没有正整数 a 和 b 的解.

2 设 O 是圆心, A 是圆内不同于 O 的固定点, 确定圆周上所有的点 P 使 $\angle OPA$ 极大.

3 N 是整数, 它的 b 进制表示是 777 . 求最小的正整数 b , 使得 N 是整数的四次方.

4 设多项式 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 和 $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ 是两个整系数多项式. 假定 $p(x) \cdot q(x)$ 的系数均为偶数, 但是它们不完全被 4 整除. 证明 $p(x)$ 和 $q(x)$ 之一有全部偶系数, 另一至少有一个奇系数.

5 已知正圆锥的底面半径是 1cm, 斜高 3cm. P 是底面圆周上一点, 由 P 绕过圆锥回到 P 的最短路线如图所示, 由顶点 V 到这条路线的最小距离是什么?



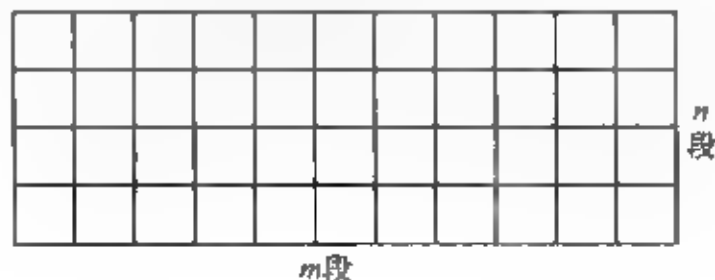
6 设 $0 < \mu < 1$, 且定义

$$\mu_1 = 1 + \mu, \mu_2 = \frac{1}{\mu_1} + \mu, \dots,$$

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{\mu_n} + \mu, n \geq 1.$$

对 n 的一切值 $1, 2, 3, \dots$, 证明 $\mu_n > 1$.

7 矩形城市恰好有 m 段长和 n 段宽(见图), 一个妇女住在城市的西南角, 工作点在东北角, 她每天步行去工作, 但是在任何给定的行程上, 她确信她的路线不包任何交叉点两次, 证明她所能采取的路线数目 $f(m, n)$ 满足 $f(m, n) \leq 2^m$.



第十届(1978年)

1 设 n 是整数, 如果 n^2 的十位数字是 7, 那么 n^2 的个位数字是什么?

2 求满足方程 $2a^2 = 3b^3$ 的一切正整数对 a, b .

3 确定最大的实数 z , 使得

$$x + y + z = 5, \quad xy + yz + zx = 3,$$

并且 x, y 也是实数.

4 凸四边形 $ABCD$ 的边 AD 和 BC 延长相交于 E , 设 H 和 G 是 BD 和 AC 的中点. 求 $\triangle EHG$ 的面积对四边形 $ABCD$ 面积的比.

5 两个女孩 Eve 和 Odette 在 3×3 棋盘上用黑棋子和白棋子对局, 规则如下:

(a) 她们轮流下子, 每次将一个棋子放到空格上.

(b) 每次, 她们可以下白子, 也可以下黑子, 且不必要总是同色.

(c) 当棋盘填满的时候, 某一行、列或对角线有偶数个黑棋子, Eve 就得到 1 分, 而某一行、列或对角线有奇数个黑棋子, Odette 就得到 1 分.

(d) 棋手至少得到 8 分中的 5 分才能算胜.

(i) $4-4$ 和局是否可能? 说明之.

(ii) 叙述先下的女孩的取胜策略.

6 作出 $x^3 + xy + y^3 = 3$ 的图象.

第十一届(1979 年)

1 已知 $a, b > 0$, 且 a, A_1, A_2, b 成等差数列, a, G_1, G_2, b 成等比数列. 求证: $A_1 A_2 \geq G_1 G_2$.

2 求证: 四面体各二面角之和不是常量.

3 已知 a, b, c, d, e 为整数, 且 $1 \leq a < b < c < d < e$. 求证:

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16}.$$

其中 $[m, n]$ 表示 m 和 n 的最小公倍数.

4 在一块圆形场地上狗追兔子. 兔子沿圆周跑动, 开始时狗处在圆心, 它以与兔子相同的速度奔跑, 并且每个时刻都处在兔子与圆心的连线段上. 求证, 兔子跑过四分之一圆周时被狗追到.

5 在坐标平面上每步沿东, 南, 西, 北四个方向之一走过距离 1, 不经过同一点两次的路线称为自避路线. 设从原点出发的 n 步自避路线条数为 $f(n)$.

试求 $f(1), f(2), f(3), f(4)$, 并证明对一切 n , 有

$$2^n < f(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}.$$

第十二届(1980年)

1 设 $a679b$ 是一个十进制的五位数, 可被 72 除尽, 试决定 a 与 b 的值.

2 从 1 到 50 各数分别打印在各张卡片上, 这些卡片搅乱, 然后字面向上排成 5 行, 每行 10 张, 重排每行的卡片, 使它们从左到右的数目增大. 然后重排每列的卡片, 使它们从上到下的数目增大, 在最后的排列中, 各行卡片是否从左到右的数仍增大?

3 有定角 A 和定半径 r 的内切圆的一切三角形中, 试决定哪一个三角形有最小的周长.

4 抛掷一个硬币, 每次正面出现得 1 分, 反面出现得 2 分. 试证恰好得到 n 分的概率是 $\frac{1}{3} \left[1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right]$.

5 平行六面体有这样的性质: 平行任何一定面 F 的所有横截面都有和 F 有相同的周长. 试确定是否有其他多面体有这个性质.

第十三届(1981年)

1 对任意的实数,用 $[t]$ 表示小于或等于 t 的最大整数.例如 $[8]=8$, $[\pi]=3$, $[-\frac{5}{2}]=-3$.试证:方程

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$$

没有实数解.

2 给定半径为 r 的圆上定点 P 的切线 l ,由此圆上动点 R 引 RQ 垂直于 l ,交 l 于 Q .试确定面积最大的 $\triangle PQR$.

3 (1)在平面 P 上给定一有限的直线集,试证:在 P 内存在任意大的圆与这些直线都不相交.

(2)证明:在 P 内存在一无限可列的直线集,使 P 内任一圆至少与此集内一直线相交(点不认为是圆).

4 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为两个多项式,它们对于一切实数 x ,均满足恒等式 $P(Q(x))=Q(P(x))$.

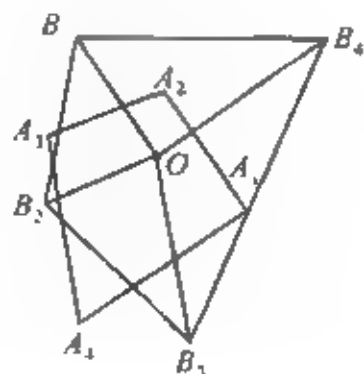
若方程 $P(x)=Q(x)$ 无实数解,试证方程 $P(P(x))=Q(Q(x))$ 亦无实数解.

5 十一个剧团参加汇演.每天都排定其中的某些剧团演出,其余的剧团则跻身于普通观众之列.在汇演结束时,每个剧团除了自己的演出日外,至少观看过每个其他剧团的一次表演.问这样的汇演至少要安排几天?

第十四届(1982年)

1 图中 $OB_i \parallel A_i A_{i+1}$, 其中 $i=1, 2, 3, 4$ ($A_5 = A_1$).

证明: $B_1 B_2 B_3 B_4$ 的面积为 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 的面积的二倍.



2 若方程 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ 的根为 a, b, c .

(1) 证明 a, b, c 互不相同;

(2) 证明 $\frac{a^{1982} - b^{1982}}{a - b} + \frac{b^{1982} - c^{1982}}{b - c} + \frac{c^{1982} - a^{1982}}{c - a}$ 为整数.

3 R^n 为 n 维欧几里得空间, 如果 R^n 中的一个点集使 R^n 中每一点至少与这集中一个点的距离为无理数, 试求这个点集中的最小个数 $g(n)$.

4 P 为集合 $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的一个排列, 一个元素 $j \in S_n$, 如果满足 $p(j) = j$, 则称为 P 的一个不动点, 令 f_n 为 S_n 的无不动点的排列个数, g_n 为恰好有一个不动点的排列个数.

证明: $|f_n - g_n| = 1$.

5 将四面体 $ABCD$ 的高分别向外延长至 A', B', C', D' , 且 $AA' = \frac{k}{h_a}, BB' = \frac{k}{h_b}, CC' = \frac{k}{h_c}, DD' = \frac{k}{h_d}$, 其中 k 为常数, h_a 表示 $ABCD$ 的自点 A 引出的高, 等等.

证明四面体 $A'B'C'D'$ 的重心与四面体 $ABCD$ 的重心重合.

第十五届(1983年)

1 求满足 $w! = x! + y! + z!$ 的所有正整数 w, x, y, z .

2 对每个实数 r , 设 T_r 是平面上变点 (x, y) 为点 $(2^r x, r2^r x + 2^r y)$ 的变换. 设 F 是所有这样变换的集合, 即

$$F = \{T_r \mid r \text{ 是实数}\}.$$

求所有曲线 $y = f(x)$, 它们的图象在 F 中各个变换下保持不变.

3 三角形的面积由它的边长确定. 四面体的体积是否由其各面的面积确定?

4 证明: 对每个素数 p , 有无穷多正整数 n 使得 p 整除 $2^n - n$.

5 k 个正数 a_1, a_2, \dots, a_k 的几何平均(GM)定义为它们的乘积的 k 次方根. 例如, 3, 4, 8 的 GM 是 6. 证明: n 个正数的集合 S 的 GM 等于 S 所有非空子集的诸 GM 的 GM.

第十六届(1984年)

1 证明 1984 个连续正整数的平方和不是一个整数的平方.

2 阿丽丝和鲍勃来到一家五金店. 店里出售带色穗带, 可以把它们系在钥匙上, 将不同的钥匙区别开. 下面是他们二人的一段对话:

阿丽丝: 你打算买一些彩色穗带系在你的钥匙上吗?

鲍勃: 我很想这样做, 但穗带只有 7 种不同的颜色, 而我却有 8 把钥匙.

阿丽丝: 这没有关系, 因为即使有两把钥匙都系上红色穗带, 但你只要注意它们是与系绿色穗带的钥匙相邻, 还是与系蓝色穗带的钥匙相邻, 就可以把它们区分开.

鲍勃: 你当然知道我的全部钥匙都套在一个钥匙圈上, 而钥匙圈是可以翻来翻去, 转来转去的, 所以在说到“相邻”或者“前面有”一类话时一定要注意.

阿丽丝: 即使是这样, 你也不需要 8 种颜色的穗带.

试问: 为了区分 n 把套在同一个钥匙圈上的钥匙, 至少需要多少种颜色的穗带?

3 一个整数称为可被其数字和整除. 如果: (1) 它的数字都不为 0; (2) 它可以被它的数字和整除 (例如 322 可被其数字和整除). 证明: 有无限多个可被数字和整除的整数.

4 一个锐角三角形面积为 1, 证明在三角形内有一点到每个顶点的距离至少为 $\left(\frac{16}{27}\right)^{\frac{1}{4}}$.

5 任给 7 个实数, 证明其中有两个数, 设为 x, y , 满足

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

第十七届(1985 年)

1 一个三角形三边之长为 6, 8, 10, 求证: 仅仅存在一条直线同时平分这个三角形的面积和周长.

2 求证: 不存在这样的整数, 把它的首位数字移到末位之后, 得到的数是原数的两倍.

3 给定的圆周长为 C . 用 x 与 y 分别表示此圆的外切正 1985 边形的周长与内接正 1985 边形的周长, 试证明: $x + y \geq 2C$.

4 求证: 2^{n-1} 整除 $n!$, 当且仅当存在某个正整数 k , 使得 $n = 2^k - 1$.

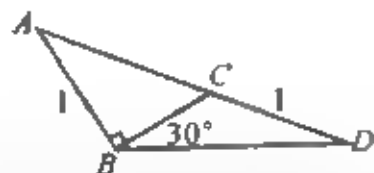
5 设 $1 < x_1 < 2$, 对于 $n = 1, 2, 3, \dots$, 定义

$$x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2} x_n^2.$$

求证: 对于 $n \geq 3$, 有 $|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}$.

第十八届(1986年)

1 如图, $AB=CD=1$, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle CBD=30^\circ$, 求 AC .



2 有一种体育竞赛共含 M 个项目, 有运动员 A, B, C 参加, 在每一项目中, 第一、二、三名分别得 p_1, p_2, p_3 分, 其中 p_1, p_2, p_3 为正整数, 且 $p_1 > p_2 > p_3$. 最后 A 得 22 分, B 与 C 均得 9 分, B 在百米赛中取得第一, 求 M 的值, 并问在跳高中谁得第二名?

3 定长的弦 ST 在一个以 AB 为直径的半圆周上滑动, M 是 ST 的中点, P 是 S 对 AB 的作垂线的垂足.

求证: 不管 ST 滑到什么位置, $\angle SMP$ 是一定角.

4 对于正整数 n 与 k , 定义 $F(n, k) = \sum_{i=0}^n r^{2k-1}$.

求证: $F(n, 1)$ 可以整除 $F(n, k)$.

5 设 u_1, u_2, u_3, \dots 是一个整数列, 适合递推关系

$$u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n,$$

设 $u_1 = 39, u_2 = 45$. 求证: 1986 可整除这个数列的无穷多项.

第十九届(1987年)

1 求出 $a^2 + b^2 = n!$ 的所有解. 这里 a, b, n 为正整数, 并且满足 $a \leq b, n < 14$.

2 设 1987 可以在 b 进制中写出二位数 xyz 且 $x + y + z = 1 + 9 + 8 + 7$, 试确定出所有可能的 x, y, z 及 b .

3 $ABCD$ 为平行四边形, E 在线段 BC 内部. 如果 $\triangle DEC, \triangle BED$ 及 $\triangle BAD$ 都是等腰三角形, 求 $\angle DAB$ 可能取哪些值.

4 在一块平地上有 n 个人, 对每个人, 他到其他人的距离均不相同. 每人都有一把水枪, 当发出失火信号时, 每人用枪击中距他最近的人.

当 n 为奇数时, 证明至少有一人身上是干的. 当 n 为偶数时, 这个结论是否永远正确.

5 对每一个正整数 n , 证明

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}].$$

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

第二十届(1988年)

1 对怎样的数值 b , 方程 $1988x^2 + bx + 8891 = 0$ 及 $8891x^2 + bx + 1988 = 0$ 有一个公共的根.

2 一个房屋的地基呈三角形, 这三角形的周长为 p 米, 面积为 A 平方米, 花园由距离地基的边界 5 米之内的土地形成.

问房屋连同花园共占地多少?

3 设 S 为平面上的一个有限点集(含点数 ≥ 5), 其中的若干点涂上红色, 其余的点涂上蓝色. 设任何三个及三个以上的同色的点不共线.

求证: 存在一个三角形, 使得

(1) 它的三个顶点涂有相同的颜色;

(2) 这三角形至少有一条边上不包含另一种颜色的点.

4 设 $x_0 = 0, x_1 = 1$, 且 $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$, $y_0 = 1, y_1 = 2$, 且 $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$.

求证: 对一切整数 $n \geq 0$, 有 $y_n^2 = 3x_n^2 + 1$.

5 设 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ 是整数的一个集合, 其中 $r > 1$. 对于 S 的非空子集 A , 定义 $p(A)$ 为 A 中的一切整数的乘积. 设 $m(S)$ 表示 $p(A)$ 的算术平均数, 这里 A 过 S 的一切非空子集.

若 $m(S) = 13$, 且有一正整数 a_{r+1} 使得 $m(S \cup \{a_{r+1}\}) = 49$, 试确定 a_1, a_2, \dots, a_r 及 a_{r+1} 的值.

第二十一届(1989 年)

1 整数 $1, 2, \dots, n$ 的排列满足: 每个数或者大于它之前的所有数, 或者小于它之前的所有数. 试问有多少个这样的排列?

2 $\triangle ABC$ 是面积等于 1 的直角三角形. A', B', C' 分别是 A, B, C 关于各自对边的反射点. 求 $\triangle A'B'C'$ 的面积.

3 定义 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如下: $a_1 = 1989^{1989}$, 且 $a_n (n > 1)$ 等于 a_{n-1} 的各位数字之和. a_1 等于多少?

4 有五只猴子和五个梯子. 每个梯子的顶端各放一根香蕉. 梯子之间有若干绳子相连, 每条绳子连接两个梯子的两级, 任一梯子的同一级上没有两条绳子接入. 开始时五只猴子分别位于不同梯子的底端, 它们沿梯子上爬, 每遇到绳子都沿之爬到另一端, 然后继续上爬.

求证: 无论有多少绳子, 最后每只猴子都各拿到一根香蕉.

5 已给数 $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$. 对于它们的任一排列 $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 定义 $S_1(\sigma) = x_1, S_2(\sigma) = x_1 + x_2, S_3(\sigma) = x_1 + x_2 + x_3, \dots, S_n(\sigma) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. 并令 $Q(\sigma) = S_1(\sigma) \cdot S_2(\sigma) \cdots S_n(\sigma)$. 试求 $\sum \frac{1}{Q(\sigma)}$. (和式取遍所有的排列).

附录2 加拿大代表队在历届 IMO 中成绩一览

第22届 IMO(1981年)

领队:Geoffrey Butler (University of Alberta)

副领队:Edward Barbeau (University of Toronto)

团体总分第7名

	题1	题2	题3	题4	题5	题6	总分	名次	奖别
David Ash	7	7	7	7	7	7	42	1	金牌
Georges Gonthier	7	7	7	7	7	7	42	1	金牌
Charles S. Timar	7	6	5	6	6	7	37	50	银牌
John Chew	7	7	2	6	6	7	35	65	银牌
Julian West	1	2	5	7	7	7	29	90	铜牌
Arthur Baragar	0	7	0	5	6	7	25	104	
David Bernier	0	2	7	7	0	7	23	113	
John Bowman	1	2	0	3	3	7	16	136	

第23届 IMO(1982年)

领队:Geoffrey Butler (University of Alberta)

副领队:Edward Barbeau (University of Toronto)

团体总分第17名

	题1	题2	题3	题4	题5	题6	总分	名次	奖别
Charles S. Timar	7	0	3	6	7	6	29	31	铜牌
Alastair Rucklidge	4	1	2	7	7	2	23	49	铜牌
Todd Cardno	3	0	2	0	7	2	14	81	
Edward D. Hatton	7	0	2	3	0	0	12	89	

第 24 届 IMO(1983 年)

领队: Edward Barbeau (University of Toronto)

副领队: Geoffrey Butler (University of Alberta)

团体总分第 14 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Martin Pottle	1	6	4	7	0	7	25	37	铜牌
Michael Cluse	3	2	7	7	0	3	22	52	铜牌
Neale Ginsburg	7	2	2	7	0	0	18	73	铜牌
William Rucklidge	1	7	0	7	2	0	17	78	铜牌
Mike Molloy	3	0	4	3	0	4	14	94	
Bruce Sutherland	1	2	0	0	3	0	6	131	

第 25 届 IMO(1984 年)

领队: (University of Victoria)

副领队: Edward Barbeau (University of Toronto)

团体总分第 20 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Martin Pottle	7	7	0	7	0	0	21	69	铜牌
Mike Molloy	7	2	1	0	6	0	16	99	
Mike Bradley	5	0	0	7	3	0	15	104	
Vo Minh Tue	3	1	0	7	3	1	15	104	
Frank D'ippolito	5	5	0	2	0	0	12	118	
Lily Yen	3	0	0	1	0	0	4	160	

第 26 届 IMO(1985 年)

领队: Ronald Schoen (University of Waterloo)

副领队: Thomas Griffiths (A. B. Lucas Secondary School)

团体总分第 12 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Minh Tue Vo	7	7	1	2	7	4	28	27	银牌
Eric Veach	7	7	1	4	0	1	20	54	铜牌
Martin Pottle	7	7	0	1	2	1	18	65	铜牌
Frank Dippolito	7	7	0	1	0	1	16	83	铜牌
Moses Klein	1	7	0	7	0	0	15	93	铜牌
Giuseppe Russo	1	7	0	0	0	0	8	147	

第 27 届 IMO(1986 年)

领队: Ronald Scoins(University of Waterloo)

副领队: Ronald Dunkley(University of Waterloo)

团体总分第 16 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Ravi Vakil	7	7	0	7	■	5	32	22	银牌
Steven Siu	7	7	1	1	6	7	29	40	银牌
Giuseppe Russo	7	5	1	3	2	0	18	94	铜牌
Rocky Lee	1	0	0	4	4	5	14	121	
Bryan Feir	7	5	0	1	1	0	14	121	
Alexandru Romosan	2	0	0	0	3	0	5	189	

第 28 届 IMO(1987 年)

领队: Bruce Shawyer(Memorial University of Newfoundland)

副领队: Ronald Scoins(University of Waterloo)

团体总分第 16 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Ravi Vakil	7	7	7	7	7	7	42	1	金牌
Colin Springer	7	7	5	5	7	2	33	55	银牌

Rocky Lee	4	7	0	1	6	1	19	113	铜牌
Stephen Fry	1	6	0	7	3	0	17	121	
Gavin MacBeath	0	7	0	3	7	0	17	121	
David Lee	2	7	1	0	1	0	11	151	

第 29 届 IMO(1988 年)

领队: Bruce Shawyer(Memorial University of Newfoundland)

副领队: Ronald Scoins(University of Waterloo)

团体总分第 10 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Ravi Vakil	7	7	7	7	5	7	40	8	金牌
Patrick Surry	7	3	1	7	7	0	25	52	银牌
Colin Springer	7	7	1	6	1	0	22	66	铜牌
David McKinnon	1	6	1	0	7	0	15	113	铜牌
Gurraj Sangha	4	0	0	0	7	0	11	150	荣誉奖
Philip Jong	4	0	1	0	5	1	11	150	

第 30 届 IMO(1989 年)

领队: Richard Nowakowski (Dalhousie University)

副领队: Georg Gunther (Sir Wilfred Grenfell College)

团体总分第 19 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Philip Jong	6	7	1	7	7	7	35	32	银牌
Jeffrey Higham	7	5	0	7	7	0	26	98	铜牌
Hugh Thomas	3	3	2	7	7	0	22	114	铜牌
Ian Goldberg	7	0	0	1	7	6	21	122	铜牌
Andrew Chow	7	3	0	1	0	0	11	190	荣誉奖

James Law	0	0	0	1	7	0	8	209	荣誉奖
-----------	---	---	---	---	---	---	---	-----	-----

第 31 届 IMO(1990 年)

领队: Richard Nowakowski (Dalhousie University)

副领队: Georg Gunther (Sir Wilfred Grenfell College)

团体总分第 11 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Danny Brown	3	7	7	7	7	1	32	29	银牌
Ian Goldberg	7	3	2	7	7	3	29	37	银牌
Jeffrey Grossman	7	2	2	7	7	3	28	44	银牌
Etsuko Amano	7	1	1	1	6	4	20	96	铜牌
Andrew Chow	7	1	2	1	3	1	15	156	荣誉奖
Hugh Thomas	0	3	1	0	7	4	15	156	荣誉奖

第 32 届 IMO(1991 年)

领队: Georg Gunther (Sir Wilfred Grenfell College)

副领队: Ravi Vakil (University of Toronto)

团体总分第 14 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Ian Goldberg	7	7	4	7	7	7	39	18	金牌
Jeffrey Grossman	7	7	5	7	7	3	36	39	银牌
Adam Logan	7	7	5	7	5	1	32	61	银牌
Peter Milley	7	2	6	7	0	0	22	126	铜牌
Mark van Raamsdonk	7	2	3	5	4	0	21	133	铜牌
Ka-Ping Yee	3	2	0	7	2	0	14	186	荣誉奖

第 33 届 IMO(1992 年)

领队: Georg Gunther (Sir Wilfred Grenfell College)

副领队: Ravi Vakil (University of Toronto)

团体总分第 22 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Jeffrey Grossman	7	7	7	7	3	5	36	9	金牌
Naoki Sato	7	2	0	7	0	5	21	93	铜牌
Alexander Nicholson	6	4	3	1	0	2	16	125	铜牌
Kevin Kwan	7	4	0	2	0	2	15	133	铜牌
Eric Lai	0	2	0	7	0	2	11	180	荣誉奖
Kevin Cheung	0	2	0	4	0	0	6	238	

第 34 届 IMO(1993 年)

领队: Georg Gunther (Sir Wilfred Grenfell College)

副领队: Ravi Vakil (University of Toronto)

团体总分第 18 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Ka-Ping Yee	7	7	0	6	7	7	34	12	金牌
Naoki Sato	6	7	0	3	4	2	22	73	铜牌
Edward Leung	6	4	0	2	4	3	19	102	铜牌
Alex Lee	0	5	0	2	6	5	18	111	铜牌
Kevin Purbhoo	0	7	0	2	7	0	16	133	铜牌
Peter Dukes	0	0	1	1	1	1	4	311	

第 35 届 IMO(1994 年)

领队: Richard Nowakowski (Dalhousie University)

副领队: Ravi Vakil (University of Toronto)

团体总分第 24 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Edward Leung	7	7	7	7	7	5	40	28	金牌
Kevin Purbhoo	7	7	7	2	6	0	29	95	铜牌
Robert Bridson	4	7	6	1	6	0	24	132	铜牌
Alyssa Ker	7	7	2	2	2	0	20	176	铜牌
Cyrus Hsia Chen	2	7	1	2	2	3	17	205	荣誉奖
Christopher Ian Hendrie	1	3	6	1	1	1	13	254	

第 36 届 IMO(1995 年)

领队: Richard Nowakowski (Dalhousie University)

副领队: Georg Gunther (Sir Wilfred Grenfell College)

团体总分第 19 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Cyrus Hsia Chen	7	7	7	7	7	0	35	36	银牌
Frédéric Latour	7	0	6	7	5	6	31	73	银牌
Byung-Kyu Chun	7	0	5	6	7	0	25	137	铜牌
Donny Cheung	7	0	4	7	7	0	25	137	铜牌
Alyssa Ker	3	0	2	7	7	0	19	193	铜牌
Lawrence Tang	7	0	4	7	0	0	18	202	荣誉奖

第 37 届 IMO(1996 年)

领队: J. P. Grossman (University of Toronto)

副领队: Ravi Vakil (Harvard University)

团体总分第 16 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Derek Kisman	7	0	7	1	0	7	22	71	银牌
Soroosh Yazdani	4	1	2	7	1	7	22	71	银牌

Richard Hoshino	6	0	2	7	0	7	22	71	银牌
Byung-Kyu Chun	5	7	2	3	0	1	18	111	铜牌
Adrian Chan	2	1	3	1	0	7	14	150	铜牌
Sabin Cautis	2	1	2	1	0	7	13	164	铜牌

第 38 届 IMO(1997 年)

领队: Richard Nowakowski (Dalhousie University)

副领队: Naoki Sato (University of Toronto)

团体总分第 29 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Byung-Kyu Chun	4	1	7	6	6	5	29	70	银牌
Adrian Chan	1	7	3	7	7	0	25	100	银牌
Mihaela Enachescu	4	7	0	3	7	0	21	142	铜牌
Sabin Cautis	2	0	0	7	7	0	16	200	铜牌
Jimmy Chui	1	1	0	7	1	0	10	285	荣誉奖
Adrian Birka	4	0	1	0	1	0	6	356	

第 39 届 IMO(1998 年)

领队: Richard Nowakowski (Dalhousie University)

副领队: Naoki Sato (University of Toronto)

团体总分第 20 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Adrian Chan	7	7	3	7	7	0	31	29	金牌
Mihaela Enachescu	7	3	3	7	7	3	30	38	银牌
Adrian Tang	5	0	2	1	7	0	15	183	铜牌
Jimmy Chui	3	0	1	7	3	0	14	194	铜牌
Yin (Jessie) Lei	2	0	1	7	3	0	13	206	荣誉奖

Adrian Birka	2	1	2	5	0	0	10	242
--------------	---	---	---	---	---	---	----	-----

第 40 届 IMO(1999 年)

领队: Edward Barbeau (University of Toronto)

副领队: Arthur Baragar (University of Nevada-Las Vegas)

团体总分第 31 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
David Arthur	7	1	2	7	0	1	18	109	铜牌
David Pritchard	7	1	2	2	0	5	17	119	铜牌
Jimmy Chui	7	3	2	2	0	2	16	129	铜牌
Yin (Jessie) Lei	4	0	1	2	1	1	9	270	
David Nicholson	4	0	2	1	0	1	8	292	
James Lee	2	1	0	2	0	1	6	344	

第 41 届 IMO(2000 年)

领队: Andrew Liu (University of Alberta)

副领队: Christopher Small (University of Waterloo)

团体总分第 17 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
David Arthur	7	7	7	7	7	3	38	7	金牌
Daniel Brox	7	7	0	7	7	0	28	45	银牌
David Pritchard	3	7	0	6	7	0	23	79	银牌
Keon Choi	7	0	2	3	0	0	12	204	铜牌
Denise Cheung	7	0	0	2	0	0	9	260	荣誉奖
David Goodman	0	2	0	0	0	0	2	416	

第 42 届 IMO(2001 年)

领队: Christopher Small (University of Waterloo)

副领队: Dorette Pronk (Dalhousie University)

团体总分第 24 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Daniel Brox	7	7	7	7	2	6	36	10	金牌
Paul Cheng	7	0	0	6	2	0	15	164	铜牌
Nima Kamoosi	7	0	0	1	5	2	15	164	铜牌
Liang Hong	7	0	0	2	4	0	13	199	铜牌
Roger Mong	6	0	0	7	0	0	13	199	铜牌
Shu Niu	3	1	1	1	2	0	8	277	

第 43 届 IMO(2002 年)

领队: Arthur Baragar (University of Nevada)

副领队: Naoki Sato (University of Toronto)

团体总分第 12 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Roger Mong	7	6	7	7	7	0	34	12	金牌
Olena Bormashenko	7	6	0	7	6	0	26	64	银牌
Alexander Fink	7	7	1	7	1	1	24	86	银牌
Tianyi (David) Han	2	6	1	7	6	1	23	99	银牌
Robert Barrington Leigh	7	0	1	7	7	0	22	113	铜牌
Ralph Furmaniak	0	0	1	7	2	3	13	233	荣誉奖

第 44 届 IMO(2003 年)

领队: Andrew Liu (University of Alberta)

副领队: Richard Hoshino (Dalhousie University)

团体总分第 12 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Olena Bormashenko	7	3	7	7	7	0	31	23	金牌
Jacob Tsimmerman	7	7	7	7	1	1	30	26	金牌
Robert Barrington Leigh	7	3	0	7	1	0	18	107	铜牌
Tianyi (David) Han	1	7	0	7	1	0	16	138	铜牌
Oleg Ivrii	5	3	0	7	1	0	16	138	铜牌
János Kramár	2	3	0	1	1	1	8	292	

第 45 届 IMO(2004 年)

领队: Christopher Small (University of Waterloo)

副领队: Edward Wang (Wilfrid Laurier University)

团体总分第 21 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Jacob Tsimmerman	7	7	7	7	7	7	42	1	金牌
Peng Shi	6	4	3	7	2	0	22	143	铜牌
János Kramár	6	6	2	7	0	1	22	143	铜牌
Yufei Zhao	6	6	1	3	1	1	18	200	铜牌
Oleg Ivrii	3	1	2	7	1	1	15	244	荣誉奖
Dong Uk (David) Rhee	7	1	3	2	0	0	13	272	荣誉奖

第 46 届 IMO(2005 年)

领队: Felix Recio (University of Toronto)

副领队: Dorette Pronk (Dalhousie University)

团体总分第 19 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Yufei Zhao	5	7	7	7	7	2	35	35	金牌
Yang (Richard) Peng	7	7	0	7	7	0	28	72	银牌

Peng Shi	2	7	2	6	6	2	25	100	银牌
Elyot Jameson Lester Grant	7	7	0	1	0	5	20	139	铜牌
Dong Uk (David) Rhee	7	2	0	7	0	2	18	156	铜牌
Lin Fei	3	1	0	1	0	1	6	328	

第 47 届 IMO(2006 年)

领队: Robert Morewood (Crofton House School)

副领队: Naoki Sato (AoPS Incorporated)

团体总分第 15 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Farzin Barekat	7	4	6	7	0	0	24	52	银牌
Yufei Zhao	7	7	1	7	1	0	23	60	银牌
Viktoriya Krakovna	7	7	0	7	1	0	22	76	银牌
Dong Uk (David) Rhee	7	4	0	7	1	1	20	109	银牌
Peng Shi	7	4	0	7	1	0	19	117	银牌
Yang (Richard) Peng	7	1	0	6	1	0	15	189	铜牌

第 48 届 IMO(2007 年)

领队: Bill Sands (University of Calgary)

副领队: Adrian Tang (University of Calgary)

团体总分第 27 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Alexander Remorov	7	7	0	7	1	0	22	93	银牌
Yan Li	5	7	0	7	1	0	20	123	铜牌
Kent Wai Kit Huynh	7	4	0	7	1	0	19	133	铜牌
Steven Neil Karp	7	2	0	7	1	0	17	161	铜牌
Chengyue (Jarno) Sun	3	1	0	7	0	0	11	293	荣誉奖

Jonathan Timur Schneider 3 0 0 6 0 0 9 344

第 49 届 IMO(2008 年)

领队, Felix Recio(University of Toronto)

副领队, Yufei Zhao

团体总分第 22 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Jonathan Schneider	7	7	0	7	7	0	28	64	银牌
Yan Li	7	7	1	4	7	0	26	78	银牌
Xiaolin Shi	7	5	0	7	2	0	21	148	铜牌
Chen Sun	7	1	0	6	7	0	21	148	铜牌
Alexander Remorov	7	5	0	7	1	0	20	159	铜牌
Chengyue (Jarno) Sun	7	4	0	7	1	0	19	170	铜牌

参考文献

- [1] 单增等. 数学奥林匹克竞赛题解精编. 南京: 南京大学出版社, 1991.
- [2] 胡大同, 陶晓永. 第 31 届国际数学奥林匹克预选题. 北京: 北京大学出版社, 1991.
- [3] 刘鸿坤等. 国内外数学竞赛试题汇编. 上海: 上海科学技术出版社, 1993.
- [4] 数学奥林匹克题库编译小组. 加拿大中学生数学竞赛题解. 天津: 新蕾出版社, 1992.
- [5] 黄宜国. 数学奥林匹克大集 1994. 上海: 上海教育出版社, 1997.
- [6] 中国数学奥林匹克委员会. 世界数学奥林匹克解题大辞典. 石家庄: 河北少年儿童出版社, 2003.
- [7] 李红, 王卫华. 第 36 届加拿大数学奥林匹克(CMO). 数理天地(高中版), 2004(10).
- [8] 李潜. 第 37 届加拿大数学奥林匹克(2005). 数学竞赛之窗(高中), 2005(6).
- [9] 刘飞. 第 40 届加拿大数学奥林匹克试题解答. 数学竞赛之窗(高中), 2008(3).
- [10] 许德刚. 第 38 届加拿大数学奥林匹克试题解答. 数学竞赛之窗(高中), 2008(1).
- [11] 童金玉. 1996 年加拿大数学奥林匹克试题及解答. 数学通讯, 1997(5).
- [12] 周维发. 1997 年加拿大数学奥林匹克问题及解答. 数学通讯, 1998(9).
- [13] 范端喜. 2000 年加拿大数学奥林匹克竞赛试题及解答. 数学通讯, 2000(23).
- [14] 费振鹏. 2003 年加拿大数学奥林匹克试题及解答. 数理天地(高中版), 2003(10).

207040

12-32-C1

- ★ 加拿大数学奥林匹克题解
- ★ 美国数学奥林匹克题解
- ★ 巴尔干地区数学奥林匹克题解
- ★ 英国数学奥林匹克题解
- ★ 俄罗斯数学奥林匹克题解
- ★ 中国数学奥林匹克国家队选拔考试题解
- ★ 国际数学奥林匹克预选题解

ISBN 978-7-308-07235-9



9 787308 072359 >

定价: 16.00元